ГЕОМЕТРИЯ

НОВЫЙ УМК

Т. М. Мищенко

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ ПО ГЕОМЕТРИИ

8 класс

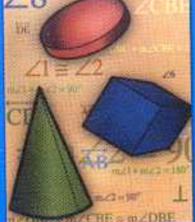
К учебникам

Л. С. Атанасяна и др. «Геометрия. 7–9 классы»

А. В. Погорелова «Геометрия. 7–9 классы»

И. Ф. Шарыгина «Геометрия. 7–9 классы»

Подготовка к ГИА



Новый учебно-методический комплект

Т.М. Мищенко

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ ПО ГЕОМЕТРИИ

Учебное пособие
к учебникам
Л.С. Атанасяна и др. «Геометрия. 7–9 классы»,
А.В. Погорелова «Геометрия. 7–9 классы»,
И.Ф. Шарыгина «Геометрия. 7–9 классы»

8 класс

АСТ • Астрель
Москва
ВКТ Владимир

УДК 373:514
ББК 22.15я72
М71

Мищенко, Т.М.
М71 Тематические тесты по геометрии: учебное пособие к учебникам Л.С. Атанасяна и др. «Геометрия. 7-9 классы», А.В. Погорелова «Геометрия. 7-9 классы», И.Ф. Шарыгина «Геометрия. 7-9 классы»: 8-й кл. /Т.М. Мищенко. – М.: АСТ: Астрель; Владимир: ВКТ, 2011. – 175, [1] с. – (Новый учебно-методический комплект).

ISBN 978-5-17-073964-6 (ООО «Издательство АСТ»)
ISBN 978-5-271-35428-1 (ООО «Издательство Астрель»)
ISBN 978-5-226-04076-4 (ВКТ)

В сборник включены тематические контрольные работы в новой форме для школьников, обучающихся в 8-х классах по учебникам Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова, С.Б. Кадомцева, Э.Г. Позняка, И.И. Юдиной "Геометрия. 7–9", А.В. Погорелова «Геометрия. 7–9», И.Ф. Шарыгина "Геометрия. 7–9". Все тесты даны в двух вариантах.

Для каждого из трех учебников даны система тематического тестирования и решения всех заданий, входящих в тесты. В конце пособия приведены правильные ответы и решения.

Сборник можно рекомендовать учителям для проведения контроля по каждой теме, учащимся для подготовки к итоговой аттестации, родителям для организации помощи детям.

УДК 373:514
ББК 22.15я72

Подписано в печать 02.02.2011. Формат 84x108 1/16.
Усл. печ. л. 18,48. Тираж 5000 экз. Заказ № 3364и.

ISBN 978-5-17-073964-6 (ООО «Издательство АСТ»)
ISBN 978-5-271-35428-1 (ООО «Издательство Астрель»)
ISBN 978-5-226-04076-4 (ВКТ)

Содержание

Система тематического тестирования по геометрии

Тематическое тестирование по геометрии восьмого класса основной школы является составной частью создания системы аттестации учащихся в новой форме, направленной на проверку их предметной компетентности в процессе изучения отдельных тем программного материала и обеспечивающей высокую дифференцируемость оценивания.

1. Целью тематического тестирования по геометрии является проверка компетентности учащихся восьмых классов в рамках проведения тематического контроля.

Кроме того, проведение тематического тестирования преследует и вторую цель, а именно, подготовить учащихся к государственной итоговой аттестации в девятом классе. Форма заданий, уровень требований, предъявляемых к заданиям тестов, содержание заданий каждой темы определяется примерными программами.

2. Характеристика структуры работы. Изложенные основные цели изучения геометрии: развитие пространственных представлений и развитие логического мышления — задают структуру итоговой тематической работы. Работа состоит из двух частей.

Содержание, выносимое на итоговую тематическую проверку, одинаково и для первой и для второй частей работы. Принципиально разными являются цели и предъявляемые требования. Если *целью первой части* является проверка уровня сформированности *пространственных представлений*, то целью второй части работы является проверка уровня сформированности *логического мышления* или логической интуиции. Кроме того, если задания первой части соответствуют уровню базовой подготовки, то проверка уровня сформированности логического мышления может быть осуществлена не только и не столько при решении задач уровня базовой подготовки, но в значительной степени при решении задач повышенного и высокого уровня подготовки. Этим определяется форма заданий каждой части. Для первой части используются задания со свободным ответом или задания с выбором ответа, и поскольку авторы концепции ГИА выбрали структуру, которая определяется формой ответа, то первая часть, в свою очередь, делится на две части. Таким образом, вся работа состоит из трех частей: первая содержит задания с выбором ответа, вторая — со свободным ответом, третья — задания с полной записью решения.

В первую и вторую части включено двенадцать заданий, отвечающих базовому уровню сложности (уровню обязательной подготовки), при этом первая часть включает 5 заданий, вторая — 7 заданий. Число включаемых заданий определялось опытным путем. Именно столько заданий успевает выполнить ученик, имеющий среднюю аттестационную оценку (годовые оценки за 7 — 9 классы) «4», за один академический час (60 минут).

В первую и вторую части каждой итоговой тематической работы включены все разделы проверяемой темы, причем для решения каждого задания надо применить либо определение, введенное в этой теме, либо доказанную теорему. По сравнению с традиционной практикой в первой и второй частях работы усилена идейно-понятийная составляющая. Здесь используются задания на определение числа решений, определяемое возможными конфигурациями, удовлетворяющими условию задачи, нахождение числа общих точек при рассмотрении конфигураций, состоящих из двух основных планиметрических фигур, определения вида той или иной фигуры и т. д.

Задания первой и второй части каждого из тематических тестов направлены на проверку основных умений, формируемых при изучении данной темы, а именно, распознавать и изображать на чертежах изучаемые фигуры, выделять из данной конфигурации заданные в условии задачи элементы.

Кроме того, задания первой и второй части каждого тематического теста проверяют умение использовать основные теоремы и формулы, отражающие свойства и признаки фигур, вычислять значения длин отрезков, градусную меру углов, площади фигур, применяя соответствующие теоретические знания.

При этом опосредованно проверяются следующие умения: понимать условие задачи, владеть соответствующей терминологией и символикой; читать чертежи, сопоставлять текст задачи с данным чертежом.

Целью третьей части итоговой аттестационной работы является дифференцированная проверка повышенного уровня владения материалом. Этим определяется форма задания. В нее включены три задания с полной записью решения. Как и для первой части итоговой тематической работы, число включаемых заданий определялось опытным путем.

Задания третьей части — сложнее, их решения требуют более глубокого уровня усвоения изученного материала. Они позволяют проверить владение методами доказательств, способность к интеграции знаний из различных разделов проверяемой темы и ранее изученных тем, владение исследовательскими навыками, а также умение найти и применить нестандартные приемы рассуждений. При выполнении третьей части работы учащиеся должны продемонстрировать умение геометрически грамотно записать условие (что дано) и заключение (что требуется найти или доказать) задачи, ее решение, сопровождая само решение необходимой аргументацией и доказательными рассуждениями. Кроме того, учащиеся должны показать умение геометрически грамотно выполнять чертежи: правильно отмечать равные элементы фигур, проводить: медианы, высоты и биссектрисы треугольников, радиусы, хорды и диаметры окружностей.

Так как концепцией ГИА выбрана структура, которая определяется видом ответа, то сложность заданий в каждом блоке идет по нарастающей.

Эквивалентность вариантов итоговых тематических работ обеспечивается одинаковым распределением заданий по видам требований, их одинаковым соотношением в работе по видам деятельности, уровням трудности, а также по одинаковому расчетному времени выполнения. Параллельность вариантов достигается за счет включения взаимозаменяемых, однотипных, одинаковых по уровню сложности заданий.

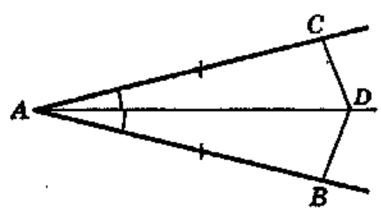
3. Время выполнения работы и условия ее проведения. Работа рассчитана на два урока, но в 8 классе такая нагрузка является для учащихся чрезмерной, поэтому работа может быть проведена в два этапа: задания 1—12 на одном уроке, а 13—15 на другом.

Первая и вторая части работы выполняются непосредственно в бланке с текстами заданий. Первые 5 заданий — это задания с выбором ответа. К каждому из пяти заданий приведены четыре варианта ответа, обозначенные цифрами 1, 2, 3, 4. Только один из этих ответов верный. При выполнении этих заданий необходимо обвести кружком номер выбранного ответа в работе.

Пример.

Луч AD — биссектриса угла BAC. На сторонах угла отложены равные отрезки AB и AC. Определите, в силу какого признака равенства треугольников треугольники BAD и CAD равны.

1. *По двум сторонам и углу между ними*;
2. *По стороне и прилежащим к ней углам*;
3. *По трем сторонам*;
4. *Треугольники не равны.*



Если была допущена ошибка, при выборе ответа, то надо аккуратно зачеркнуть отмеченную цифру и обвести другую:

1) 26 2) 20 ~~3)~~ 15 4) 10

Следующие семь заданий (6—12) — задания со свободным ответом. В этом случае полученный ответ следует записать в специально отведенном для этого месте.

Ответом для этих заданий может быть отдельное слово, целое число, десятичная дробь, обыкновенная дробь, алгебраическое выражение.

При этом от учащихся не требуются ни подробная запись решения, ни объяснение выбранного решения. В случае записи неверного ответа необходимого зачеркнуть его и записать рядом другой.

И, наконец, три задания (13—15) с записью полного решения.

Учитель может посоветовать учащимся выполнять задания в том порядке, в котором они даны в работе. При этом, если ученик не может быстро решить задачу, не следует задерживаться на ней, а имеет смысл перейти к выполнению следующей задачи. Выполнив все задания, которые ученик смог решить, можно вернуться к пропущенным заданиям.

Следует проинформировать учащихся, что все необходимые для выполнения задания записи и вычисления можно сделать на черновике, который на проверку не сдается.

4. Система оценивания выполнения отдельных заданий и работы в целом. Оценивание работы (оценка по пятибалльной шкале: «2», «3», «4» и «5») осуществляется по принципу сложения, оно зависит от количества заданий, которые ученик верно выполнил.

Задание с выбором ответа считается выполненным верно, если в списке вариантов ответов учеником обведена цифра, которая соответствует правильному ответу. Задание со свободным ответом считается выполненным верно, если правильной ответ вписан в специально отведенное для этого место.

Если к заданию приведен чертеж, то на нем можно проводить необходимые построения.

При этом от ученика не требуется ни подробная запись решения, ни объяснения выбранного решения. Черновик, на котором ученик делает необходимые ему записи, на проверку учителю не сдается и при оценке не может влиять на выставляемую по заданию отметку.

Оценивание при проведении первых двух частей работы на одном уроке.

Согласно авторской концепции ГИА за каждое верно решенное задание первой и второй части учащемуся начисляется 1 балл. Таким образом, максимально за работу в форме теста можно получить 12 баллов. Общий балл формируется путем подсчета общего количества баллов, полученных учащимся за выполнение работы.

Для получения положительной оценки ученик должен набрать не менее восьми баллов. В противном случае за работу ставится отметка «2». Выполнение двенадцати или одиннадцати заданий оценивается отметкой 5.

Задание третьей части считается выполненным верно, если учащийся выбрал правильный ход решения, из письменной записи решения понятен ход его рассуждений, все логические шаги решения обоснованны. Необходимые для решения чертежи правильно отражают условие и ход решения задачи. Правильно выполнены все преобразования и вычисления, получен верный ответ.

Если при верном ходе решения задачи допущена ошибка, не носящая принципиального характера и не влияющая на общую правильность хода решения (имеются незначительные неточности в чертежах, негрубые ошибки или описки), то в этом случае учащемуся засчитывается балл, который на один балл меньше указанного.

Оценивание при проведении третьей части работы на одном уроке.

Согласно авторской концепции ГИА верное решение заданий третьей части оценивается по разному: задание 13 оценивается в два балла, а задания 14 и 15 в три балла.

Максимально можно набрать 8 баллов, при этом положительная оценка выставляется, если набрано не менее 4 баллов.

Проведение работы в два этапа позволяет выставить за нее две оценки.

Учебник «Геометрия. 7—9» Л.С. Атанасяна и др.

Глава V. Четырехугольники

Целью теста, рекомендованного для данной главы, является оперативная проверка достижения учащимися восьмого класса обязательного уровня подготовки по темам "Многоугольники", "Параллелограмм", "Трапеция", "Прямоугольник", "Ромб. Квадрат". Задания тестов направлены на проверку основных умений, формируемых при изучении этих тем:

— распознавать на чертежах многоугольники, выпуклые многоугольники; четырехугольники: параллелограммы, трапеции, прямоугольники, ромбы и квадраты; их элементы: вершины, стороны, диагонали; соседние и противоположные вершины;
— изображать многоугольники и четырехугольники: параллелограмм, трапецию, прямоугольник, ромб и квадрат, и их элементы;
— непосредственно применять определения свойств и признаков параллелограмма, трапеции, прямоугольника, ромба и квадрата;
— распознавать на чертежах равные треугольники, используя для определения равных элементов изученные признаки и свойства параллелограмма, прямоугольника, ромба и квадрата, определения трапеции, равнобедренной трапеции и прямоугольной трапеции, а также их элементов;
— выделять из данной конфигурации заданные в условии задачи элементы;
— вычислять значения длин сторон, градусную меру углов, периметры треугольников, четырехугольников и многоугольников, применяя теорему о сумме углов многоугольника, определения признаков и свойств параллелограмма, прямоугольника, ромба и квадрата, определения трапеции, равнобедренной трапеции и прямоугольной трапеции, теорему Фалеса, и ранее изученные признаки и свойства треугольников.

При этом опосредованно проверяются следующие умения:

— понимать условие задачи, владеть соответствующей терминологией и символикой;
— читать чертежи, сопровождающие текст задачи, сопоставлять текст задачи с данным чертежом, выделять на чертеже необходимую при решении задачи конфигурацию.

ТЕСТ 1

Вариант 1

Часть 1

1. В ромбе $ABCD$ проведена бóльшая диагональ AC. Определите вид треугольника ABC.
1. Остроугольный;
2. прямоугольный;
3. тупоугольный;
4. определить невозможно.

2. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Определите вид треугольника AOD.
1. Разносторонний;
2. равносторонний;
3. равнобедренный;
4. определить невозможно.

3. В параллелограмме $ABCD$ из вершины тупого угла B проведена высота BM к стороне CD, а из вершины острого угла A проведена высота AN к стороне BC. Определите взаимное расположение прямых BM и AN.

1. Перпендикулярны;
2. пересекаются, но не перпендикулярны;
3. параллельны;
4. определить невозможно.

4. В параллелограмме $ABCD$ углы BAC и CDB равны. Определите вид параллелограмма $ABCD$, если стороны AB и AD равны.

1. Прямоугольник, отличный от квадрата;
2. ромб, отличный от квадрата;
3. квадрат;
4. определить невозможно.

5. Определите, сколько решений имеет задача. Решать задачу не надо.

Постройте равнобедренную трапецию, если ее боковая сторона равна 4 см, диагональ 6 см, а одно из оснований равно 10 см.

1. Одно;
2. два;
3. три;
4. решения нет.

Часть 2

6. Сколько сторон имеет выпуклый n-угольник, если сумма его внутренних углов равна $1620°$?

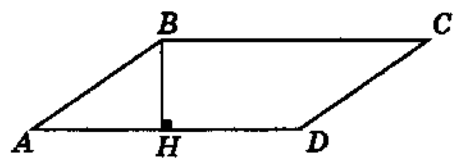
____

7. Сколько вершин имеет правильный многоугольник, если каждый из его внешних углов равен $24°$?

____

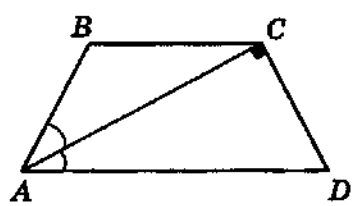
8. В параллелограмме $ABCD$ высота BH в два раза меньше стороны CD. Найдите градусную меру угла ABC.

____



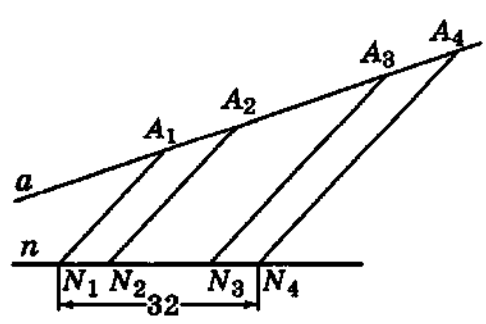
9. В равнобедренной трапеции с большим основанием AD диагональ AC перпендикулярна боковой стороне CD и является биссектрисой угла BAD. Найдите угол DAB.

____

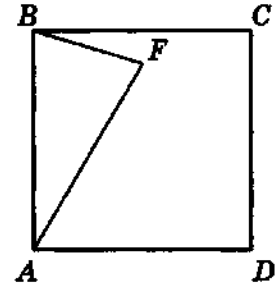


10. Параллельные прямые A_1N_1, A_2N_2, A_3N_3 и A_4N_4 пересекают прямые a и n. Известно, что $A_1A_2 : A_2A_3 : A_3A_4 = 1 : 2 : 1$. Отрезок N_1N_4 равен 32 см. Найдите длину отрезка N_1N_3.

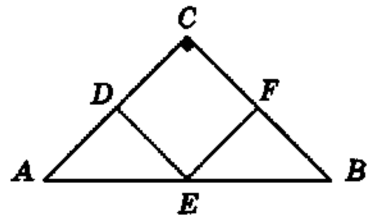
____



11. Внутри квадрата, сторона которого равна 1 см, отмечена такая точка F, что угол AFB равен $75°$, а угол FAD — $60°$. Найдите длину отрезка AF.

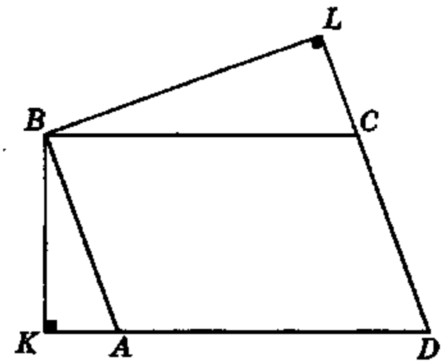


12. В равнобедренный прямоугольный треугольник ABC ($\angle C$ — прямой) вписан квадрат $DCFE$, имеющий с ним общий прямой угол, а вершина противолежащего угла лежит на гипотенузе AB. Найдите катет треугольника, если периметр квадрата равен 18 см.

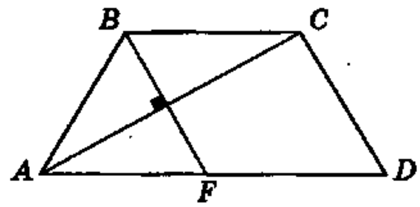


Часть 3

13. Угол между высотами параллелограмма, проведенными из вершины его острого угла, в 4 раза больше этого угла. Найдите острый угол параллелограмма.



14. В трапеции $ABCD$ стороны AB и CD равны. Биссектриса тупого угла B перпендикулярна диагонали AC и отсекает от данной трапеции параллелограмм $FBCD$. Найдите угол BCD.



15. На продолжении стороны AC равностороннего треугольника ABC взята точка D так, что разность расстояний от нее до сторон AB и BC равна 4 см. Найдите высоту треугольника, проведенную из вершины C.

Вариант 2

Часть 1

1. В ромбе $ABCD$ проведена диагональ BD, которая равна стороне ромба. Определите вид треугольника ABD.

1. Разносторонний;
2. равносторонний;
3. равнобедренный;
4. определить невозможно.

2. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O и образуют угол AOD, равный $120°$. Определите вид треугольника AOB.

1. Остроугольный;
2. прямоугольный;
3. тупоугольный;
4. определить невозможно.

3. В ромбе $ABCD$ из вершины тупого угла B проведена высота BM к стороне CD, а из вершины острого угла A проведена высота AN к стороне BC. Определите взаимное расположение прямых BM и AN.

1. Перпендикулярны;
2. пересекаются, но не перпендикулярны;
3. параллельны;
4. определить невозможно.

4. В параллелограмме $ABCD$ углы BAC и CDB равны. Определите вид параллелограмма $ABCD$, если стороны AB и AD равны.

1. Прямоугольник, отличный от квадрата;
2. ромб, отличный от квадрата;
3. квадрат;
4. определить невозможно.

5. Определите, сколько решений имеет задача. Решать задачу не надо.

Постройте равнобедренную трапецию, если одно из ее оснований равно 7 см, боковая сторона равна 5 см, а один из углов равен $60°$.

1. Одно;
2. два;
3. три;
4. решения нет.

Часть 2

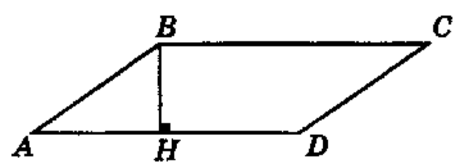
6. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если каждый из его внутренних углов равен $165°$?

____

7. В выпуклом тридцатиугольнике все внутренние углы равны. Найдите градусную меру внутреннего угла.

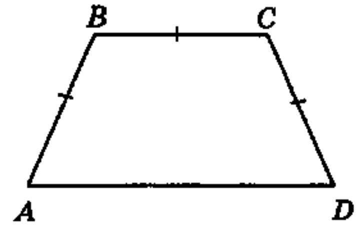
____

8. Высота BH параллелограмма $ABCD$ отсекает от него равнобедренный треугольник. Найдите градусную меру угла ADC.



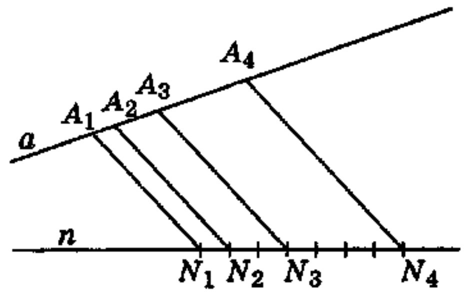
____

9. В трапеции $ABCD$ стороны AB, BC и CD равны. Основание AD в два раза больше основания BC. Найдите угол CDA.



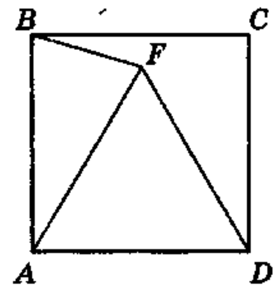
____

10. Параллельные прямые A_1N_1, A_2N_2, A_3N_3 и A_4N_4 пересекают прямые a и n. Известно, что $N_1N_2 : N_2N_3 : N_3N_4 = 1 : 2 : 4$. Отрезок A_1A_2 равен 7 см. Найдите длину отрезка A_3A_4.



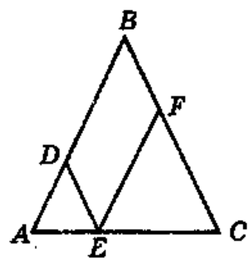
____

11. Внутри квадрата отмечена такая точка F, что треугольник AFD — равносторонний. Найдите угол FBC.



____

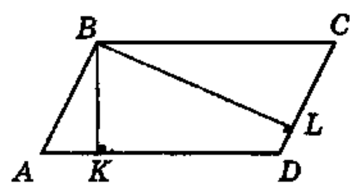
12. В равнобедренный треугольник ABC вписан параллелограмм $DBFE$ так, что угол параллелограмма DBF совпадает с углом при вершине треугольника ABC, а вершина противолежащего угла лежит на основании AC. Найдите боковую сторону треугольника, если периметр параллелограмма равен 16 см.



____

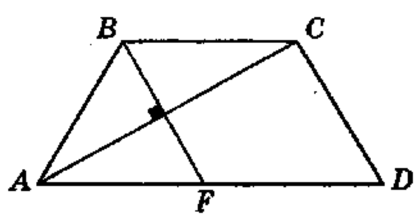
Часть 3

13. Угол между высотами BL и BK параллелограмма $ABCD$, проведенными из вершины тупого угла, в 3 раза меньше этого угла. Найдите градусную меру угла BAD.



____

14. В трапеции $ABCD$ стороны AB и CD равны. Биссектриса тупого угла B перпендикулярна диагонали AC и отсекает от данной трапеции параллелограмм $FBCD$. Найдите сторону BC, если периметр трапеции равен 30 см.



____

15. На основании AC равнобедренного треугольника ABC взята точка D так, что сумма расстояний от нее до сторон AB и BC равна 12 см. Найдите высоту треугольника, проведенную из вершины C.

Глава VI. Площадь

Целью теста, рекомендованного для данной главы, является оперативная проверка достижения учащимися восьмого класса обязательного уровня подготовки по темам "Площадь многоугольника", "Площади параллелограмма, треугольника и трапеции", "Теорема

Пифагора". Задания тестов направлены на проверку основных умений, формируемых при изучении этих тем:

— вычислять площади квадрата и прямоугольника, параллелограмма, треугольника и трапеции, непосредственно применяя соответствующие формулы;
— применять свойства площади;
— устанавливать равенство площадей по равенству соответствующих элементов;
— понимать, в каких ситуациях применима теорема Пифагора;
— применять обратную теорему Пифагора для определения вида треугольников;
— вычислять значения длин отрезков, применяя формулы вычисления площадей квадрата, прямоугольника, параллелограмма, треугольника и трапеции;
— вычислять значения длин сторон, градусную меру углов, площади фигур, применяя теорему Пифагора и ранее изученные определения, признаки и свойства геометрических фигур.

При этом опосредованно проверяются следующие умения:

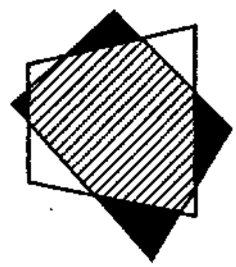
— понимать условие задачи, владеть соответствующей терминологией и символикой;
— читать чертежи, сопровождающие текст задачи, сопоставлять текст задачи с данным чертежом, выделять на чертеже необходимую при решении задачи конфигурацию.

ТЕСТ 2

Вариант 1

Часть 1

1. Два равновеликих четырехугольника расположены так, как показано на рисунке. Сумма площадей черных треугольников равна S_1, а сумма площадей белых треугольников равна S_2. Сравните S_1 и S_2.



1. $S_1 < S_2$;
2. $S_1 = S_2$;
3. $S_1 > S_2$;
4. сравнить невозможно.

2. В треугольнике ABC к стороне a проведена высота h_a, а к стороне b проведена высота h_b. Сравните длины высот h_a и h_b, если $a > b$.

1. $h_a > h_b$;
2. $h_a = h_b$;
3. $h_a < h_b$;
4. сравнить невозможно.

3. Определите, сколько решений имеет следующая задача. Решать задачу не надо.

Стороны параллелограмма 8 см и 6 см, а одна из высот — 10 см. Найдите вторую высоту параллелограмма.

1. Одно;
2. два;
3. три;
4. решений нет.

4. Как изменится площадь прямоугольника, если одну его сторону уменьшить в три раза, а другую увеличить в три раза?

1. Увеличится в девять раз;
2. увеличится в три раза;
3. уменьшится в три раза;
4. не изменится.

5. В четырехугольнике $ABCD$ стороны BC и AD параллельны. Из вершины C к стороне AB опущен перпендикуляр CF, его длина равна 15 см. Отрезок FB равен 8 см, а сторона AD равна 17 см. Определите вид четырехугольника $ABCD$.

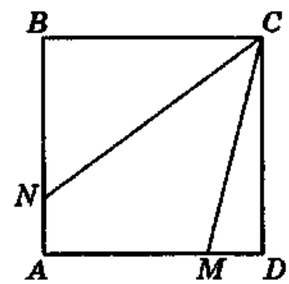
1. Параллелограмм;
2. прямоугольная трапеция;
3. трапеция, отличная от равнобедренной;
4. равнобедренная трапеция.

Часть 2

6. Площадь прямоугольника, в котором стороны относятся как 1 : 4, равна площади квадрата со стороной 6 см. Найдите большую сторону прямоугольника.

____

7. На сторонах AB и AD квадрата $ABCD$ отложены отрезки $AN = \frac{1}{4}AB$ и $AM = \frac{3}{4}AD$. Найдите площадь четырехугольника $ANCM$, если площадь $ABCD$ равна 1 см^2.

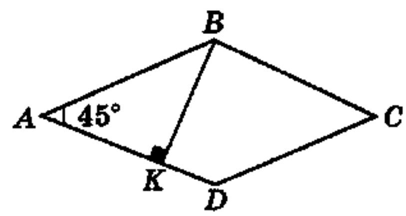


____

8. Соседние стороны параллелограмма равны 8 см и 11 см, а угол между ними равен 30°. Найдите площадь параллелограмма.

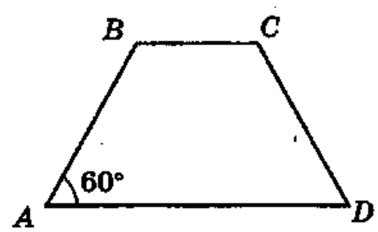
____

9. В ромбе $ABCD$ проведена высота BK, равная $5\sqrt{2}$ см. Найдите площадь ромба, если угол BAD равен 45°.



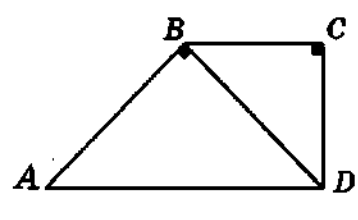
____

10. В равнобедренной трапеции $ABCD$ периметр равен 42 см, боковая сторона равна 10 см. Найдите площадь трапеции, если ее острый угол равен 60°.



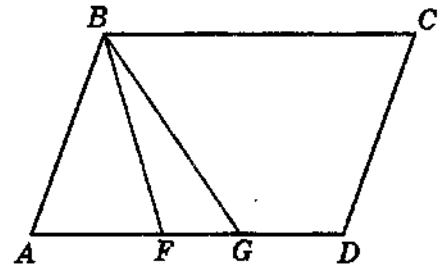
____

11. Диагональ BD прямоугольной трапеции $ABCD$ ($CD \perp AD$) отсекает от трапеции прямоугольный равнобедренный треугольник ABD. Найдите отношение диагонали BD трапеции к ее основанию AD, если основание BC равно a.



____

12. В параллелограмме $ABCD$ на стороне AD, равной 16 см, отмечены точки F и G. Найдите отношение площади параллелограмма $ABCD$ к площади треугольника GBF, если отрезок FG равен 4 см.



____

Часть 3

13. Треугольник ABC, стороны которого 13 см, 14 см и 15 см, разбит на три треугольника отрезками, соединяющими точку пересечения медиан M с вершинами треугольника. Найдите площадь треугольника BMC.

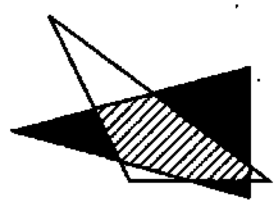
14. Найдите площадь трапеции, основания которой 3 см и 7 см, а диагонали — 6 см и 8 см.

15. В треугольнике ABC проведена медиана AD. На прямой, содержащей медиану AD, отмечена точка M. Докажите, что треугольники ABM и ACM равновелики.

Вариант 2

Часть 1

1. Два равновеликих треугольника расположены так, как показано на рисунке. Сумма площадей черных треугольников равна S_1, а сумма площадей белых треугольников равна S_2. Сравните S_1 и S_2.



1. $S_1 < S_2$;
2. $S_1 = S_2$;
3. $S_1 > S_2$;
4. сравнить невозможно.

2. В параллелограмме $ABCD$ к стороне a проведена высота h_a, а к стороне b проведена высота h_b. Сравните длины высот h_a и h_b, если $a > b$.

1. $h_a = h_b$;
2. $h_a < h_b$;
3. $h_a > h_b$;
4. сравнить невозможно.

3. Определите, сколько решений имеет следующая задача. Решать задачу не надо.

Стороны параллелограмма 15 см и 6 см, а одна из его высот — 18 см. Найдите вторую высоту параллелограмма.

1. Одно;
2. два;
3. три;
4. решения нет.

4. Как изменится площадь прямоугольника, если одну его сторону увеличить в четыре раза, а другую уменьшить в два раза?

1. Увеличится в два раза;
2. увеличится в четыре раза;
3. уменьшится в два раза;
4. не изменится.

5. В четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD параллельны. Из вершины C к стороне AB опущен перпендикуляр CF, его длина равна 12 см. Отрезок FB равен 5 см, а сторона AD равна 15 см. Определите вид четырехугольника $ABCD$.

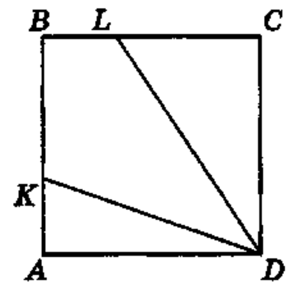
1. Параллелограмм;
2. прямоугольная трапеция;
3. трапеция, отличная от равнобедренной;
4. равнобедренная трапеция.

Часть 2

6. В прямоугольнике $ABCD$ стороны равны 3 см и 8 см. Найдите меньшую сторону равновеликого ему прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$, периметр которого равен 20 см.

____

7. На сторонах AB и BC квадрата $ABCD$ отложены отрезки $AK = \frac{1}{3}AB$ и $BL = \frac{1}{3}BC$. Найдите площадь четырехугольника $KBLD$, если площадь квадрата $ABCD$ равна 1 см^2.

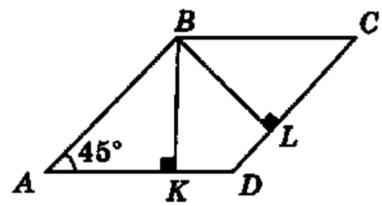


____

8. Тупой угол ромба равен $150°$, а его сторона равна 6 см. Найдите площадь ромба.

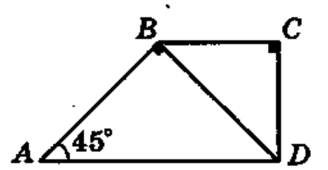
____

9. В параллелограмме $ABCD$ проведены высоты BK и BL, равные $3\sqrt{2}$ см и 5 см соответственно. Найдите площадь параллелограмма, если угол BAD равен $45°$.



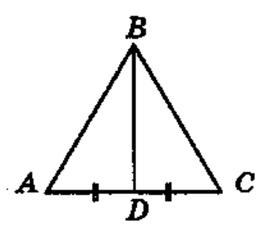
____

10. Одна из диагоналей прямоугольной трапеции делит эту трапецию на два прямоугольных равнобедренных треугольника. Найдите площадь этой трапеции, если ее боковая сторона, прилежащая к прямому углу, равна 4.



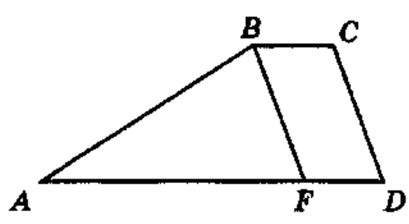
____

11. Сторона равностороннего треугольника равна a. Найдите отношение длины медианы этого треугольника к его стороне.



____

12. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны 14 см и 4 см соответственно. Из вершины B проведена прямая, параллельная стороне CD. Найдите отношение площади трапеции $ABCD$ к площади треугольника ABF.



____

Часть 3

13. Каждая диагональ четырехугольника делит его на два равновеликих треугольника. Докажите, что данный четырехугольник — параллелограмм.

14. Найдите площадь трапеции, основания которой 6 см и 26 см, а боковые стороны — 12 см и 16 см.

15. В треугольнике *ABC* через вершину *A* треугольника *ABC* проведена прямая, параллельная стороне *BC*. На этой прямой отмечена точка *M*. Докажите, что треугольники *ABM* и *ACM* равновелики.

Глава VII. Подобные треугольники

Целью теста, рекомендованного для данной главы, является оперативная проверка достижения учащимися восьмого класса обязательного уровня подготовки по темам "Определение подобных треугольников", "Признаки подобия треугольников ", "Применение подобия к доказательству теорем и решению задач. Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника". Задания тестов направлены на проверку основных умений, формируемых при изучении этих тем:

- распознавать на чертежах пропорциональные отрезки и подобные треугольники, используя их определения;
- выделять из данной конфигурации подобные треугольники;
- распознавать на чертежах подобные треугольники, применяя признаки подобия треугольников;
- распознавать и изображать на чертежах среднюю линию треугольника;
- делать выводы из подобия треугольников;
- вычислять значения длин сторон, градусную меру углов, применяя признаки подобия треугольников и ранее изученные свойства фигур;
- знать значения синуса, косинуса и тангенса углов 30°, 45° и 60°;
- вычислять значения косинуса, синуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника при решении конкретных задач;
- решать задачи на вычисление элементов прямоугольного треугольника: длин сторон, градусной меры углов, периметров треугольников, применяя теоремы о средней линии треугольника; определения синуса, косинуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника и ранее изученные свойства фигур.

При этом опосредованно проверяются следующие умения:

- понимать условие задачи, владеть соответствующей терминологией и символикой;
- читать чертежи, сопровождающие текст задачи, сопоставлять текст задачи с данным чертежом, выделять на чертеже необходимую при решении задачи конфигурацию.

ТЕСТ 3

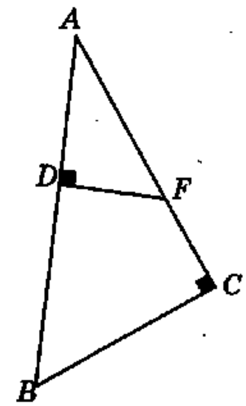
Вариант 1

Часть 1

1. Среди приведенных ниже троек чисел определите тройку чисел, пропорциональных числам 1, 4 и 5.

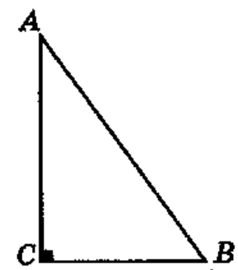
1. 2, 4, 5;
2. 2, 8, 10;
3. 1, 4, 10;
4. 2, 8, 5.

2. Прямоугольные треугольники ABC и FDA подобны. Определите, какая из записей пропорциональности всех пар сходственных сторон является верной.



1. $\frac{AD}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{AF}{CB}$;
2. $\frac{AF}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{AD}{CB}$;
3. $\frac{AF}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{DF}{CB}$;
4. $\frac{AF}{AD} = \frac{AC}{AB} = \frac{BC}{DF}$.

3. Дан прямоугольный треугольник ABC ($\angle C$ — прямой). В ответах выберите и подчеркните верное определение косинуса острого угла B.

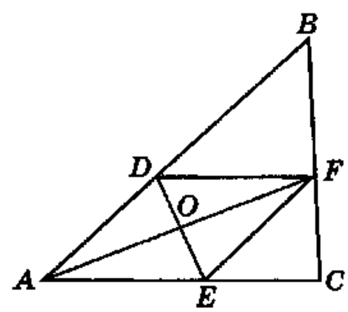


1. $\cos B = \frac{CB}{AC}$;
2. $\cos B = \frac{CB}{AB}$;
3. $\cos B = \frac{AC}{AB}$;
4. определить невозможно.

4. Определите, вершинами какого четырехугольника являются середины сторон ромба, отличного от квадрата.

1. Параллелограмма, отличного от прямоугольника и ромба;
2. прямоугольника, отличного от квадрата;
3. ромба, отличного от квадрата;
4. квадрата.

5. В треугольник ABC вписан ромб $ADFE$ так, что угол A у них общий, а противоположная ему вершина F лежит на стороне BC. Диагонали ромба равны 8 см и 6 см. Найдите отношение $BF : FC$, если $AB = 15$ см.



1. 2 : 3;
2. 1 : 3;
3. 2 : 1;
4. 1 : 2.

Часть 2

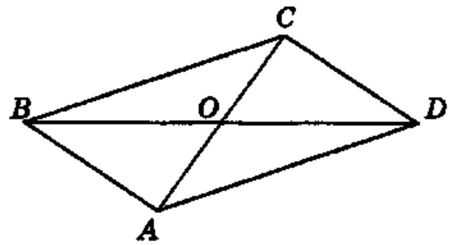
6. Треугольники ABC и FDG подобны. Площадь треугольника FDG составляет $\frac{4}{9}$ площади треугольника ABC. Найдите коэффициент подобия этих треугольников.

____

7. Треугольники ABC и FDG подобны и их сходственные стороны относятся, как 5 : 3. Найдите периметр треугольника ABC, если периметр треугольника FDG равен 18 см.

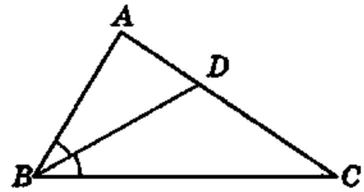
____

8. В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC перпендикулярна стороне CD. Найдите тупой угол между диагоналями, если диагонали AC и BD равны 6 см и $6\sqrt{2}$ см соответственно.



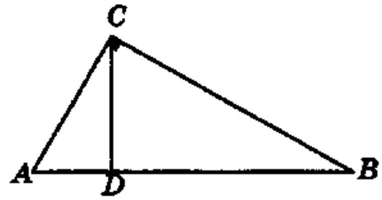
____

9. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD. Точка D делит сторону AC на отрезки AD и DC соответственно равные 3 см и 5 см. Найдите сторону AB, если сторона BC равна 10 см.



____

10. Высота CD прямоугольного треугольника ABC, проведенная из вершины прямого угла C, делит гипотенузу AB на отрезки AD и DB. Найдите высоту CD, если $AB = 26$ см, $AD = 8$ см.



____

11. Диагональ квадрата равна 26 см. Найдите периметр четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон квадрата.

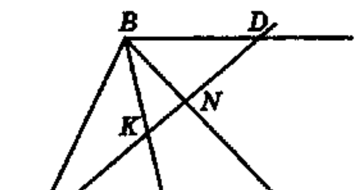
____

12. Диагональ AC ромба $ABCD$ равна 24 см. Середина стороны AB — точка K — соединена с вершиной D и пересекает диагональ AC в точке M. Найдите длину отрезка MC.

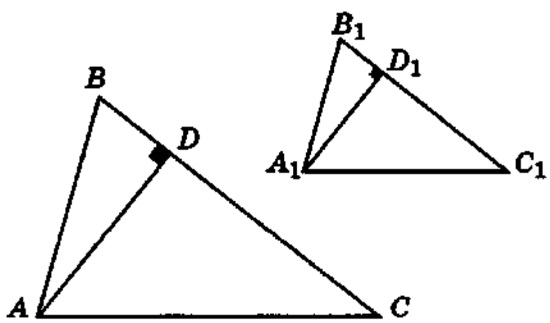
____

Часть 3

13. Через вершину B треугольника ABC проведена прямая BD, параллельная AC. Через точку N, лежащую на стороне BC, проведен луч AN, пересекающий эту прямую в точке D, а медиану BH в точке K. В каком отношении точка K делит медиану BH, если $BN : NC = 1 : 2$?



14. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны и их стороны BC и B_1C_1 сходственные. Высота AD треугольника ABC относится к его стороне CB, как $2:3$. Найдите отношение стороны C_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$ к его высоте A_1D_1.



15. Докажите, что в прямоугольном треугольнике проекции катетов на гипотенузу относятся как квадраты катетов.

Вариант 2

Часть 1

1. Среди приведенных ниже троек чисел определите тройку чисел, пропорциональных числам 2, 3 и 4.

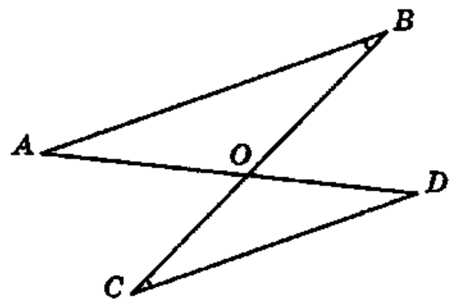
1. 2, 3, 8;

2. 2, 6, 4;

3. 4, 6, 12;

4. 6, 9, 12.

2. Треугольники *ABO* и *DCO* подобны и $\angle OCD = \angle OAD$. Определите, какая из записей пропорциональности всех пар сходственных сторон является верной.



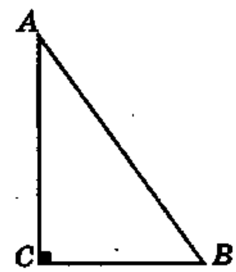
1. $\frac{CD}{AB} = \frac{CO}{BO} = \frac{DO}{AO}$;

2. $\frac{CO}{AB} = \frac{OD}{BO} = \frac{CD}{AO}$;

3. $\frac{OD}{AB} = \frac{CD}{BO} = \frac{CO}{AO}$;

4. $\frac{OD}{OC} = \frac{OB}{AO} = \frac{OD}{AB}$.

3. Дан прямоугольный треугольник *ABC* ($\angle C$ — прямой). В ответах выберите и подчеркните верное определение синуса острого угла *A*.



1. $\sin A = \frac{CB}{AC}$;

3. $\sin A = \frac{AC}{AB}$;

2. $\sin A = \frac{CB}{AB}$;

4. определить невозможно.

4. Определите, вершинами какого четырехугольника являются середины сторон прямоугольника.

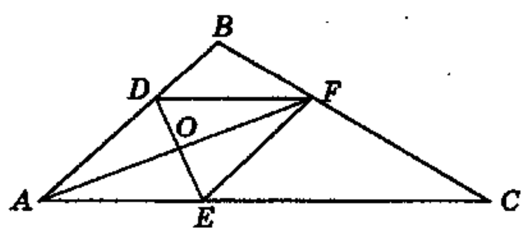
1. Параллелограмма, отличного от прямоугольника и ромба;

2. прямоугольника, отличного от квадрата;

3. ромба, отличного от квадрата;

4. квадрата.

5. В треугольник *ABC* вписан ромб *ADFE* так, что угол *A* у них общий, а противоположная ему вершина *F* лежит на стороне треугольника *BC*. Диагонали ромба равны 12 см и 16 см. Найдите отношение *BF* : *FC*, если *AB* = 15 см.



1. 2 : 3;

2. 1 : 2;

3. 2 : 1;

4. 3 : 2.

Часть 2

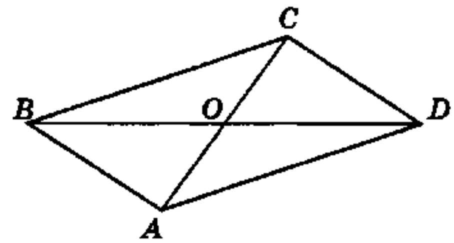
6. Треугольники ABC и FDG подобны. Площадь треугольника FDG составляет $\frac{1}{4}$ площади треугольника ABC. Найдите коэффициент подобия этих треугольников.

____

7. Треугольники ABC и FDG подобны и их сходственные стороны относятся, как $4 : 3$. Найдите периметр треугольника ABC, если периметр треугольника FDG равен 42 см.

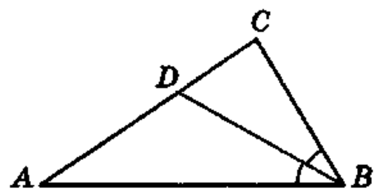
____

8. В параллелограмме $ABCD$, сторона CD которого равна $4\sqrt{3}$ см, диагональ AC перпендикулярна стороне CD. Найдите тупой угол между диагоналями, если диагональ AC равна 8 см.



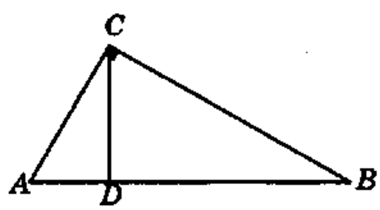
____

9. В треугольнике ABC со сторонами 10 см, 15 см и 17 см проведена биссектриса BD к большей стороне AC. Найдите меньший из отрезков, на которые точка D делит сторону AC.



____

10. Высота CD прямоугольного треугольника ABC, проведенная из вершины прямого угла, делит гипотенузу AB на отрезки AD и DB. Найдите катет AC, если $AB = 16$ см, $BD = 7$ см.



____

11. Диагональ равнобедренной трапеции равна 26 см. Найдите периметр четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон трапеции.

____

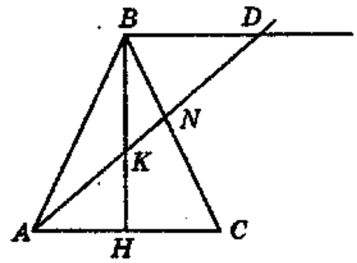
12. Диагональ BD прямоугольника $ABCD$ равна 24 см. Середина стороны AB — точка K — соединена с вершиной D и пересекает диагональ AC в точке M. Найдите длину отрезка AM.

____

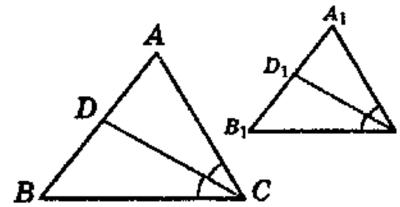
Часть 3

13. Докажите, что если диагонали четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны, то $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$.

14. Через вершину B равнобедренного треугольника ABC проведена прямая AD, параллельная основанию AC. Через точку K — середину высоты BH — проведен луч AK, пересекающий эту прямую в точке D, а сторону BC в точке N. В каком отношении точка N делит сторону BC?



15. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны и их стороны AB и A_1B_1 сходственные. Биссектриса CD треугольника ABC относится к его стороне AB, как 2 : 3. Найдите отношение стороны A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$ к его биссектрисе C_1D_1.



Глава VIII. **Окружность**

Целью теста, рекомендованного для данной главы, является оперативная проверка достижения учащимися восьмого класса обязательного уровня подготовки по темам: “Касательная к окружности”, “Центральные и вписанные углы”, “Четыре замечательные точки треугольника”, “Вписанная и описанная окружности”. Задания тестов направлены на проверку основных умений, формируемых при изучении этих тем:

— распознавать на чертежах секущую и касательную к окружности, центральный угол и дугу окружности, соответствующую данному центральному углу, и угол, вписанный в окружность, используя их определения;
— определять взаимное расположение прямой и окружности;
— формулировать утверждение, обратное данному;
— вычислять значения длин сторон, градусную меру углов, применяя определения секущей и касательной к окружности, центрального и вписанного углов, окружности, вписанной в многоугольник, и окружности, описанной около многоугольника; многоугольника, вписанного в окружность, и многоугольника, описанного около окружности; свойство касательной и признак касательной, теоремы о вписанных углах, теоремы о точках пересечения: биссектрис, высот и медиан треугольника, а также серединных перпендикуляров к сторонам треугольника; теорем об окружности, вписанной в треугольник, и об окружности, описанной около треугольника; свойств и признаков вписанных и описанных четырехугольников.

При этом опосредованно проверяются следующие умения:

— понимать условие задачи, владеть соответствующей терминологией и символикой;
— читать чертежи, сопровождающие текст задачи, сопоставлять текст задачи с данным чертежом, выделять на чертеже необходимую при решении задачи конфигурацию.

ТЕСТ 4

Вариант 1

Часть 1

1. Даны три прямые k, l и m. Прямые k и l пересекаются в точке A, прямые l и m пересекаются в точке B, а прямые k и m — в точке C. Определите, сколько существует окружностей, одновременно касающихся каждой из трех прямых k, l и m.

1. Ни одной; 2. одна; 2. три; 4. четыре.

2. Радиусы двух окружностей равны 6 см и 9 см, а расстояние между их центрами равно 9 см. Определите, сколько общих точек имеют эти окружности.

1. Ни одной; 2. одна; 3. две; 4. три.

3. Определите вид треугольника, если точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам лежит на одной из сторон треугольника.

1. Прямоугольный;
2. остроугольный;
3. тупоугольный;
4. определить невозможно.

4. Углы треугольника относятся, как 3 : 12 : 5. Определите, как расположен центр описанной около этого треугольника окружности.

1. Внутри треугольника;
2. на одной из сторон треугольника;
3. вне треугольника;
4. определить невозможно.

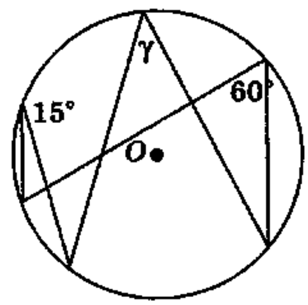
5. Центры вписанной и описанной окружностей треугольника лежат на одной из его высот и не совпадают. Определите вид треугольника.

1. Равнобедренный;
2. равносторонний;
3. разносторонний;
4. определить невозможно.

Часть 2

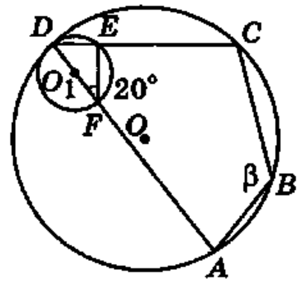
6. По данным рисунка найдите градусную меру угла γ.

____



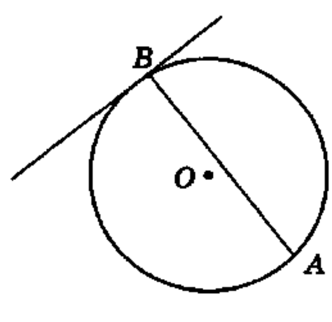
7. Две окружности касаются в точке D. Угол между диаметром FD и хордой FE меньшей окружности равен 20°. Найдите градусную меру угла β.

____

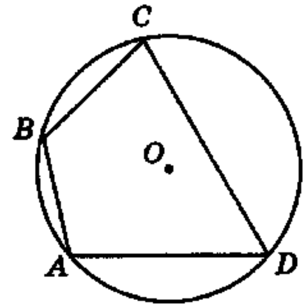


8. Хорда стягивает дугу окружности, градусная мера которой 40°. Найдите градусную меру угла, который образует эта хорда с касательной к окружности, проходящей через ее конец.

____

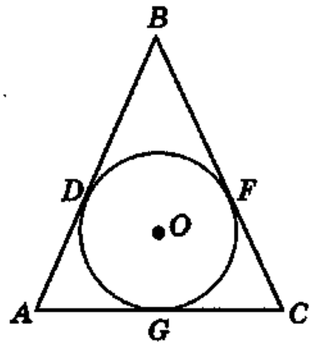


9. Вершины четырехугольника $ABCD$ лежат на окружности и разбивают ее на четыре дуги, градусные меры которых последовательно равны $56°$, $74°$, $97°$ и $133°$. Найдите градусную меру меньшего угла четырехугольника.



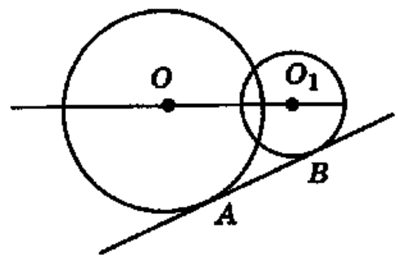
____

10. В равнобедренный треугольник ABC вписана окружность, которая касается основания AC в точке G, а боковых сторон — в точках D и F. Найдите периметр треугольника ABC, если $FB = 4$ см, $AG = 2$ см.



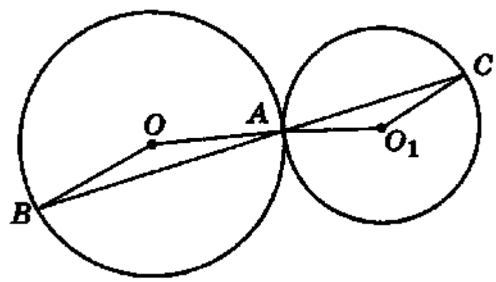
____

11. К двум окружностям с центрами в точках O и O_1 и радиусами, равными 12 см и 4 см, проведена касательная AB. Найдите расстояние между центрами окружностей, если отрезок касательной AB равен 15 см.



____

12. Две окружности с радиусами 9 см и 3 см касаются внешним образом в точке A, через которую проходит их общая секущая BC. Найдите длину отрезка AB, если AC равен 5 см.

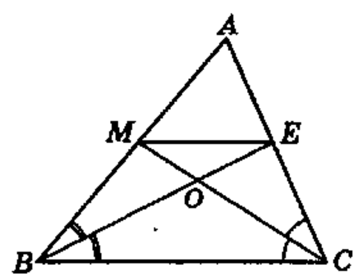


____

Часть 3

13. Докажите, что градусная мера угла, вершина которого лежит внутри окружности, равна полусумме градусных мер дуг, из которых одна заключена между его сторонами, а другая между продолжениями сторон.

14. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BE и CM. Найдите угол BEM, если угол BAC равен $60°$.



15. На стороне AB параллелограмма $ABCD$ как на диаметре построена окружность, проходящая через точку пересечения диагоналей и середину стороны AD. Найдите острый угол параллелограмма.

Вариант 2

Часть 1

1. Даны три прямые k, l и m. Прямые k и l параллельны, а прямая m их пересекает. Определите, сколько существует окружностей, одновременно касающихся каждой из трех прямых k, l и m.

1. Ни одной;
2. одна;
3. две;
4. три.

2. Радиусы двух окружностей равны 4 см и 7 см, а расстояние между их центрами равно 11 см. Определите, сколько общих точек имеют эти окружности.

1. Ни одной;
2. одна;
2. две;
4. три.

3. Определите вид треугольника, если точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам лежит вне треугольника.

1. Прямоугольный;
2. остроугольный;
3. тупоугольный;
4. определить невозможно.

4. Углы треугольника относятся, как 3 : 4 : 5. Определите, как расположен центр окружности, описанной около этого треугольника.

1. Внутри треугольника;
2. на одной из сторон треугольника;
3. вне треугольника;
4. определить невозможно.

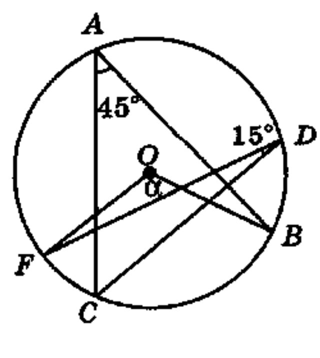
5. Центры вписанной и описанной окружностей треугольника совпадают. Определите вид треугольника.

1. Равнобедренный;
2. равносторонний;
3. разносторонний;
4. определить невозможно.

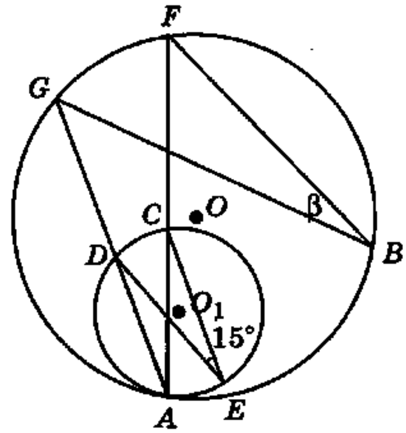
Часть 2

6. По данным рисунка найдите градусную меру угла α.

____

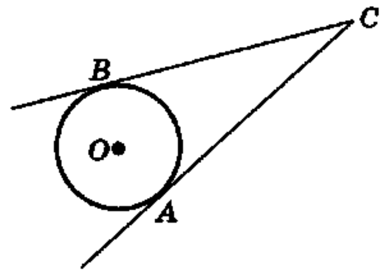


7. Две окружности с центрами в точках O и O_1 касаются внутренним образом. Угол, образованный хордами CE и DE окружности с центром в точке O_1 равен 15°. Найдите градусную меру угла, обозначенного буквой β.



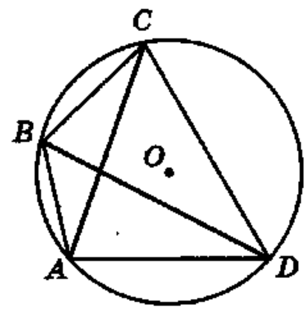
____

8. К окружности из точки C проведены касательные CA и CB. Найдите градусную меру угла ACB, если градусная мера меньшей дуги AB равна 108°.



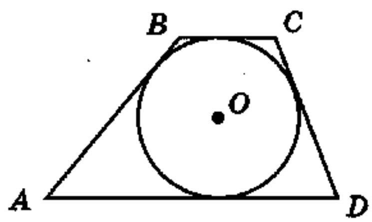
____

9. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ угол ABD равен 50°, а угол CDA равен 75°. Найдите угол CAD.



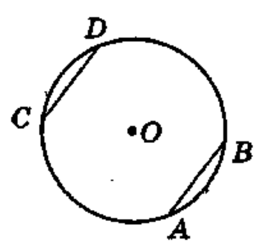
____

10. В трапецию вписана окружность. Найдите периметр этой трапеции, если ее основания равны 8 см и 12 см.



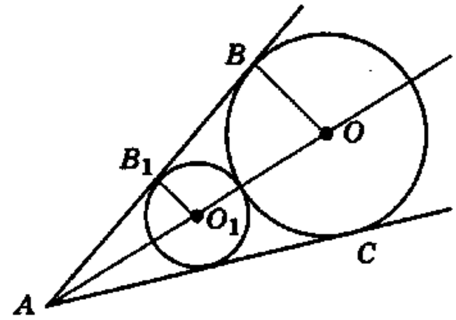
____

11. В окружности с диаметром 20 см проведены две параллельные хорды, длина каждой из которых равна 16 см. Найдите расстояние между хордами.



____

12. Две касающиеся внешним образом окружности с центрами в точках O и O_1 касаются сторон угла A (B и B_1 — точки касания). Расстояние между точками A и O_1 в два раза меньше, чем расстояние между центрами окружностей. Найдите радиус O_1B_1, если радиус OB равен 24 см.

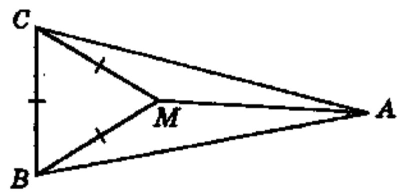


____

Часть 3

13. Докажите, что градусная мера угла, вершина которого лежит вне окружности, равна полуразности градусных мер дуг, заключенных между его сторонами.

14. В треугольнике ABC угол B равен $80°$, угол C равен $70°$. Внутри треугольника выбрана точка M так, что треугольник CMB — равносторонний. Найдите угол MAB.



15. Дана трапеция, в которую можно вписать окружность. Докажите, что окружности, построенные на ее боковых сторонах как на диаметрах, касаются друг друга.

Глава IX. **Векторы**

Целью теста, рекомендованного для данной главы, является оперативная проверка достижения учащимися восьмого класса обязательного уровня подготовки по теме: "Векторы". Задания тестов направлены на проверку основных умений, формируемых при изучении этой темы:

— понимать, что такое вектор, длина (модуль) вектора, равные векторы; как строить сумму нескольких векторов;

— изображать и обозначать вектор, различать его начало и конец в записи и на чертеже, распознавать, изображать и записывать сонаправленные и противоположно направленные векторы, откладывать от любой точки вектор, равный данному;

— распознавать на чертеже и строить сумму и разность двух векторов, сумму нескольких векторов, заданных геометрически; среднюю линию трапеции;

— вычислять значения длин сторон, градусную меру углов, применяя законы сложения векторов; законов произведения вектора на число; определение и теорему о средней линии трапеции;

и применять полученные знания при решении задач.

При этом опосредованно проверяются следующие умения:

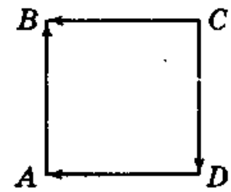
— понимать условие задачи, владеть соответствующей терминологией и символикой;

— читать чертежи, сопровождающие текст задачи, сопоставлять текст задачи с данным чертежом, выделять на чертеже необходимую при решении задачи конфигурацию.

ТЕСТ 5

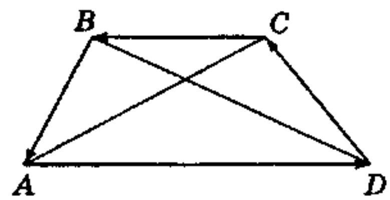
Вариант 1

Часть 1



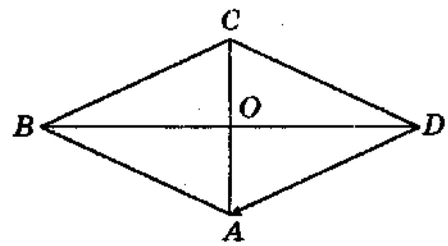
1. Четырехугольник $ABCD$ — квадрат. Среди данных векторов укажите одну пару равных векторов.

1. $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$;
2. $\overline{BC}$ и $\overline{DA}$;
3. $\overline{AB}$ и $\overline{CB}$;
4. $\overline{CD}$ и $\overline{DA}$.



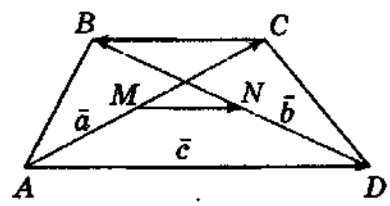
2. Дана трапеция $ABCD$. Выразите вектор $\overline{CB}$ через векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, если $\bar{a} = \overline{BA}$, $\bar{b} = \overline{AD}$ и $\bar{c} = \overline{DC}$.

1. $\bar{c} + \bar{b} - \bar{a}$;
2. $\bar{a} - \bar{c} + \bar{b}$;
3. $\bar{b} + \bar{a} + \bar{c}$;
4. $-(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})$.



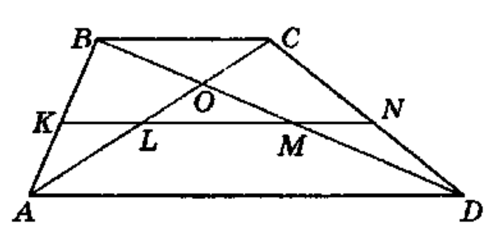
3. Диагонали ромба $ABCD$ AC и BD равны 10 см и 24 см соответственно. Найдите длину вектора $\overline{DA}$.

1. 5 см;
2. 12 см;
3. 13 см;
4. 17 см.



4. В трапеции $ABCD$ $\overline{AC} = \bar{a}$, $\overline{DB} = \bar{b}$ и $\overline{AD} = \bar{c}$. Точки M и N — середины диагоналей AC и BD соответственно. Выразите вектор $\overline{MN}$ через векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$.

1. $\bar{c} - \frac{1}{2}\bar{a} - \frac{1}{2}\bar{b}$;
2. $\bar{c} + \frac{1}{2}\bar{a} + \frac{1}{2}\bar{b}$;
3. $\bar{c} - \frac{1}{2}\bar{a} + \frac{1}{2}\bar{b}$;
4. $\bar{c} + \frac{1}{2}\bar{a} - \frac{1}{2}\bar{b}$.



5. Диагонали трапеции $ABCD$ делят ее среднюю линию KN на три отрезка. Отрезки KL и LM равны 6 см и 8 см соответственно. Найдите большее основание трапеции.

1. 16 см;
2. 14 см;
3. 12 см;
4. 28 см.

Часть 2

6. Вектор $\overline{AB} = \bar{a}$. Длина вектора $\overline{CD}$ в три раза больше длины вектора $\overline{AB}$, векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ противоположно направлены. Выразите вектор $\overline{CD}$ через вектор $\bar{a}$.

____

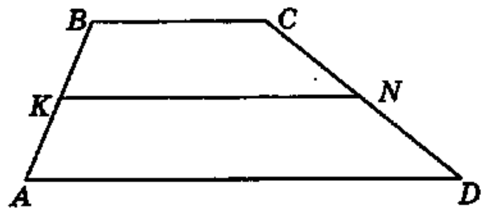
7. Упростите выражение $\overline{MB} + \overline{AM} + \overline{BA}$.

____

8. Даны три коллинеарных вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$. Известно, что $2\bar{a} + 0{,}5\bar{b} - \bar{c} = \bar{0}$ и $|\bar{a}| = 1$, $|\bar{b}| = 2$. Найдите $|\bar{c}|$, если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ сонаправлены.

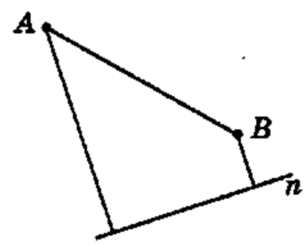
____

9. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC проведена средняя линия KN, равная 10 см. Найдите основание AD, если $AD = 1{,}5\ BC$.



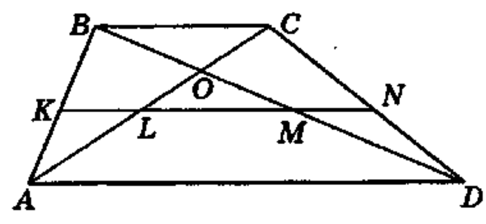
____

10. Расстояния от концов отрезка до прямой n равны 9 см и 3 см. Отрезок AB не пересекает прямую n. Найдите расстояние от середины отрезка AB до этой прямой.



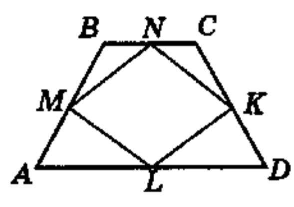
____

11. В трапеции $ABCD$ диагонали делят ее среднюю линию на три равные части KL, LM и MN. Найдите отношение оснований трапеции $BC : AD$.



____

12. Диагонали равнобедренной трапеции $ABCD$ перпендикулярны. Середины сторон трапеции являются вершинами четырехугольника $KLMN$. Определите вид четырехугольника $KLMN$.



____

Часть 3

13. Выразите вектор $\overline{CK}$ через вектор $\overline{KA}$, если $\overline{OK} = \frac{2}{7}\overline{OA} + \frac{5}{7}\overline{OC}$, где O — произвольная точка.

14. Докажите, что для любых двух векторов справедливо неравенство

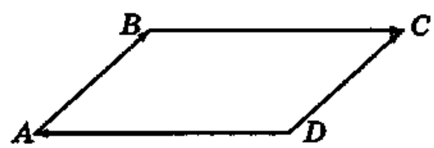
$$|\vec{x} - \vec{y}| \le |\vec{x}| + |\vec{y}|.$$

15. Дан квадрат $ABCD$. Докажите, что $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = 0$, где точка O является точкой пересечения диагоналей квадрата.

Вариант 2

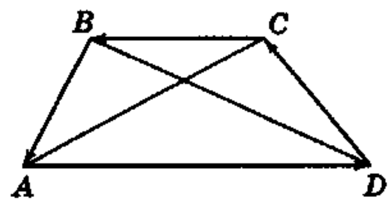
Часть 1

1. Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм. Среди данных векторов укажите одну пару равных векторов.



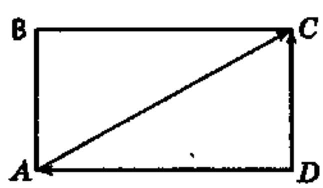
1. $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$;
2. $\overline{BC}$ и $\overline{DA}$;
3. $\overline{AB}$ и $\overline{CB}$;
4. $\overline{DC}$ и $\overline{DA}$.

2. Дана трапеция $ABCD$. Выразите вектор $\overline{DC}$ через векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, если $\bar{a} = \overline{BA}$, $\bar{b} = \overline{AD}$ и $\bar{c} = \overline{CB}$.



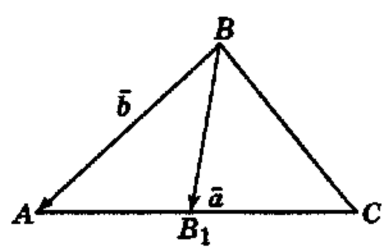
1. $\bar{c} + \bar{b} - \bar{a}$;
2. $\bar{a} - \bar{c} + \bar{b}$;
3. $\bar{b} + \bar{a} + \bar{c}$;
4. $-(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})$.

3. В прямоугольнике $ABCD$ стороны AB и AD равны 8 см и 15 см соответственно. Найдите длину вектора $\overline{AC}$.



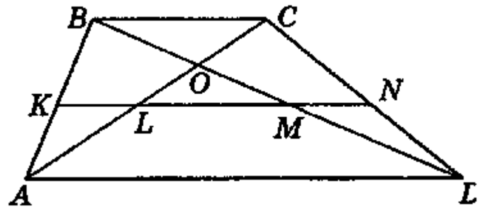
1. 15 см;
2. 17 см;
3. 8 см;
4. 23 см.

4. В треугольнике ABC $\overline{BA} = \bar{b}$ и $\overline{CA} = \bar{a}$. Отрезок BB_1 — медиана треугольника ABC. Выразите вектор $\overline{BB_1}$ через векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$.



1. $\frac{1}{2}\bar{a} - \frac{1}{2}\bar{b}$;
2. $\frac{1}{2}\bar{b} - \bar{a}$;
3. $\bar{b} - \frac{1}{2}\bar{a}$;
4. $\frac{1}{2}\bar{a} - \frac{1}{2}\bar{b}$.

5. Средняя линия KN трапеции $ABCD$ пересекает ее диагонали в точках L и M. Найдите длину отрезка ML, если основания AD и BC соответственно равны 23 см и 15 см.



1. 19 см;
2. 4 см;
3. 8 см;
4. 11,5 см.

Часть 2

6. Вектор $\overline{AM} = \overline{m}$. Длина вектора $\overline{MN}$ равна половине длины вектора $\overline{AM}$, векторы $\overline{MN}$ и $\overline{AM}$ противоположно направлены. Выразите вектор $\overline{MN}$ через вектор $\overline{m}$.

____

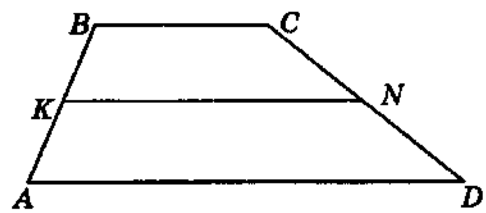
7. Упростите выражение $\overline{AK} - \overline{BC} + \overline{KC}$.

____

8. Даны три коллинеарных вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$. Известно, что $3\bar{a} - \bar{b} + 2\bar{c} = 0$ и $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{c}| = 4$. Найдите $|\bar{b}|$, если векторы $\bar{a}$ и $\bar{c}$ сонаправлены.

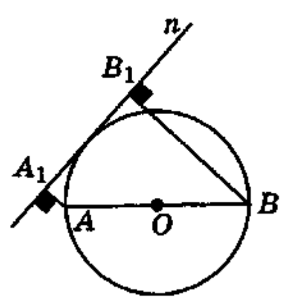
____

9. В трапеции $ABCD$, одно из оснований которой равно 5 см, проведена средняя линия KN, равная 6 см. Найдите длину другого основания трапеции.



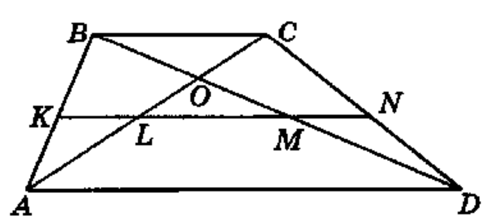
____

10. Расстояния от концов диаметра окружности AB до касательной n к этой окружности равны 9 см и 1 см. Найдите расстояние от центра окружности до касательной n.



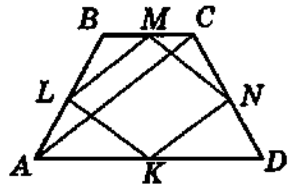
____

11. В трапеции $ABCD$ основания относятся, как $BC : AD = 3 : 4$. Найдите отношение отрезков KL и LN, на которые диагональ AC делит среднюю линию трапеции.



____

12. В равнобедренную трапецию $ABCD$ вписан четырехугольник $KLMN$ так, что его стороны ML и KN параллельны диагонали AC. Вершина M четырехугольника является серединой основания BC, а вершина K — серединой основания AD. Определите вид четырехугольника $KLMN$.



____

Часть 3

13. Выразите вектор $\overline{AK}$ через вектор $\overline{KC}$, если $\overline{OK} = \frac{3}{5}\overline{OA} + \frac{2}{5}\overline{OC}$, где O — произвольная точка.

14. Докажите, что для любых двух векторов справедливо неравенство

$$|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|.$$

15. Дан прямоугольник $ABCD$. Докажите, что $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = 0$, где точка O является точкой пересечения диагоналей прямоугольника.

Учебник «Геометрия. 7–9» А.В. Погорелова

§ 6. Четырехугольник

Целью теста, рекомендованного для данного параграфа, является оперативная проверка достижения учащимися восьмого класса обязательного уровня подготовки по темам "Четырехугольники", "Параллелограмм", "Прямоугольник", "Ромб. Квадрат", "Трапеция", "Средняя линия треугольника". Задания тестов направлены на проверку основных умений, формируемых при изучении этих тем:

— распознавать на чертежах четырехугольники: параллелограммы, трапеции, прямоугольники, ромбы и квадраты; их элементы: вершины, стороны, диагонали; соседние и противоположные вершины;
— изображать четырехугольники: параллелограмм, трапецию, прямоугольник, ромб и квадрат, и их элементы;
— непосредственно применять определения трапеции, средней линии треугольника и трапеции, определения, свойства и признаки параллелограмма, прямоугольника, ромба и квадрата, теоремы о средней линии треугольника и средней линии трапеции;
— распознавать на чертежах равные треугольники, используя для определения равных элементов изученные признаки и свойства параллелограмма, прямоугольника, ромба и квадрата, трапеции, теоремы о средней линии треугольника и средней линии трапеции;
— выделять из данной конфигурации заданные в условии задачи элементы фигур;
— вычислять значения длин сторон, градусную меру углов, периметры треугольников, четырехугольников, применяя определения, признаки и свойства параллелограмма, прямоугольника, ромба и квадрата, определение трапеции, теоремы о средней линии треугольника и средней линии трапеции, теорему Фалеса и ранее изученные признаки и свойства треугольников.

ТЕСТ 1

Вариант 1

Часть 1

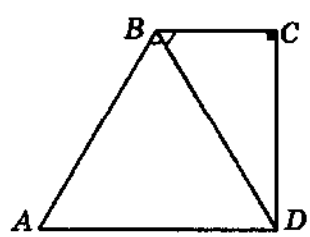
1. Углы ABC и ADC выпуклого четырехугольника $ABCD$ равны, точка O — середина диагонали AC. Найдите сторону AD, если стороны AB и BC равны 4 см и 7 см соответственно.

1. 4 см;
2. 7 см;
3. 11 см;
4. определить невозможно.

2. В параллелограмме $ABCD$ углы BAC и CDB равны. Определите вид параллелограмма $ABCD$, если стороны AB и AD равны.

1. Прямоугольник, отличный от квадрата;
2. ромб, отличный от квадрата;
3. квадрат;
4. определить невозможно.

3. В прямоугольной трапеции $ABCD$ диагональ BD является биссектрисой угла ABC. Определите вид треугольника ABD, если угол ABC равен 120°.



I. по сторонам:

1. разносторонним;
2. равносторонним;
3. равнобедренным;
4. определить невозможно.

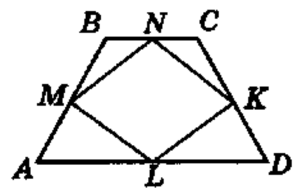
II. по углам:

1. остроугольным;
2. прямоугольным;
3. тупоугольным.

4. На сторонах AB и AD квадрата $ABCD$ отмечены точки N и M соответственно так, что $AN : NB = DM : MA = 1 : 2$. Определите взаимное расположение прямых NC и BM.

1. Перпендикулярны;
2. пересекаются, но не перпендикулярны;
3. параллельны;
4. определить невозможно.

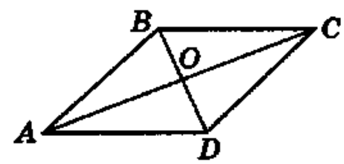
5. Диагонали равнобедренной трапеции $ABCD$ перпендикулярны. Середины сторон трапеции являются вершинами четырехугольника $KLMN$. Определите вид четырехугольника $KLMN$.



1. Прямоугольник, отличный от квадрата;
2. ромб, отличный от квадрата;
3. квадрат;
4. определить невозможно.

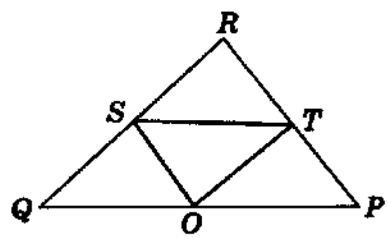
Часть 2

6. В параллелограмме $ABCD$ диагонали AC и BD соответственно равны 11 см и 8 см. Найдите периметр треугольника ABC, если периметр треугольника BCD равен 23 см.



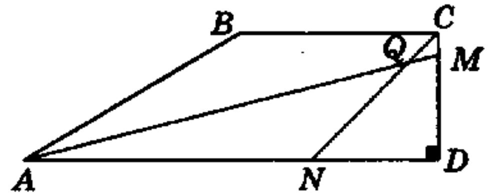
____

7. В треугольнике RPQ, периметр которого 18 см, проведены средние линии SO, OT и ST. Найдите периметр треугольника SOT.



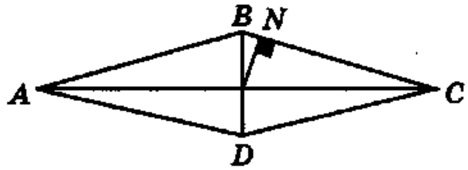
____

8. В прямоугольной трапеции $ABCD$ ($CD \perp AD$) острый угол равен $30°$. Найдите угол AQN, образованный биссектрисами CN и AM углов A и C.



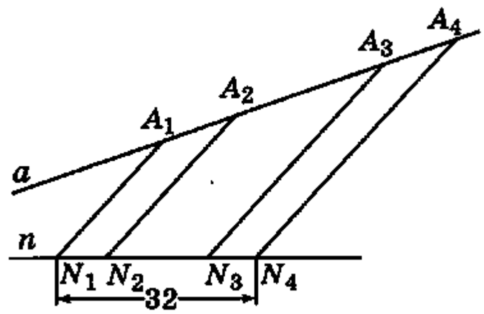
____

9. В ромбе $ABCD$ с острым углом $30°$ расстояние от точки пересечения диагоналей до стороны ромба равно 3 см. Найдите периметр ромба.



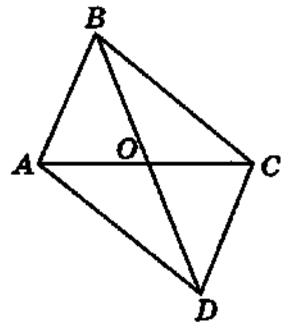
____

10. Параллельные прямые A_1N_1, A_2N_2, A_3N_3 и A_4N_4 пересекают прямые a и n. Известно, что $A_1A_2 : A_2A_3 : A_3A_4 = 1 : 2 : 1$. Отрезок N_1N_4 равен 32 см. Найдите длину отрезка N_1N_3.



____

11. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, причем диагональ BD вдвое больше стороны AB. Угол между диагоналями равен 112°, а угол CAD равен 40°. Найдите угол CDA.



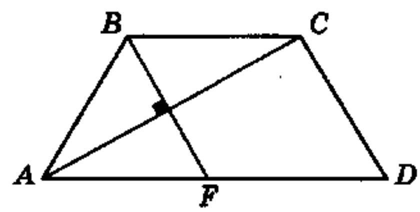
____

12. В параллелограмме $ABCD$ проведены биссектрисы углов A и D, разбившие сторону BC на три равных отрезка: BF, FE и EC. Найдите меньшую сторону параллелограмма, если его периметр равен 88 см.

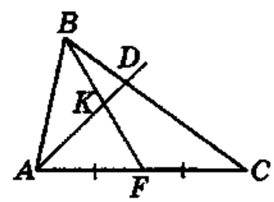
____

Часть 3

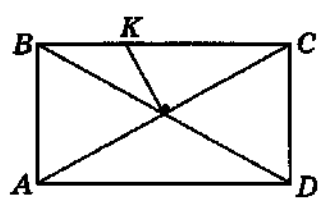
13. В трапеции $ABCD$ стороны AB и CD равны. Биссектриса тупого угла B перпендикулярна диагонали AC и отсекает от данной трапеции параллелограмм $FBCD$. Найдите угол BCD.



14. Через точку D, лежащую на стороне BC, проведен луч AD, пересекающий медиану BF в точке K. В каком отношении точка K делит медиану BF, считая от вершины B, если $BD : DC = 1 : 2$.



15. В прямоугольнике $ABCD$ серединный перпендикуляр к диагонали AC пересекает сторону BC в точке K так, что $BK : KC = 1 : 2$. Найдите угол ACD.



Вариант 2

Часть 1

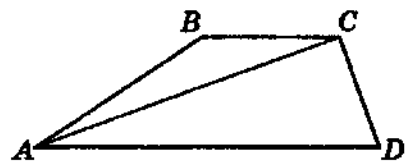
1. Стороны AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ параллельные, а точка O пересечения диагоналей делит диагональ AC пополам. Найдите сторону AD, если стороны AB и BC равны 4 см и 7 см соответственно.

1. 4 см;
2. 7 см;
3. 11 см;
4. определить невозможно.

2. Диагональ BD параллелограмма $ABCD$ делит тупой угол B пополам. Определите вид параллелограмма $ABCD$.

1. Прямоугольник, отличный от квадрата;
2. ромб, отличный от квадрата;
3. квадрат;
4. определить невозможно.

3. Диагональ AC трапеции $ABCD$ образует со стороной AD угол, равный $20°$. Определите вид треугольника ACD, если угол BCD равен $110°$.

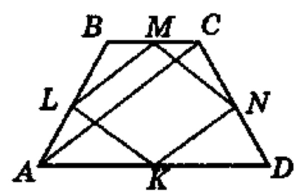


I. по сторонам:	II. по углам:
1. разносторонним;	1. остроугольным;
2. равносторонним;	2. прямоугольным;
3. равнобедренным;	3. тупоугольным.
4. определить невозможно.	

4. На сторонах AB и CD квадрата $ABCD$ отмечены середины сторон N и M соответственно. Определите взаимное расположение прямых NC и AM.

1. Перпендикулярны;
2. пересекаются, но не перпендикулярны;
3. параллельны;
4. определить невозможно.

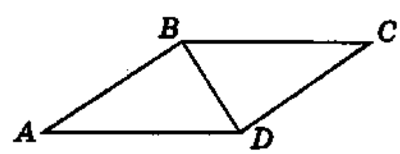
5. В равнобедренную трапецию $ABCD$ вписан четырехугольник $KLMN$ так, что его стороны ML и KN параллельны диагонали AC. Вершина M четырехугольника является серединой основания BC, а вершина K — серединой основания AD. Определите вид четырехугольника $KLMN$.



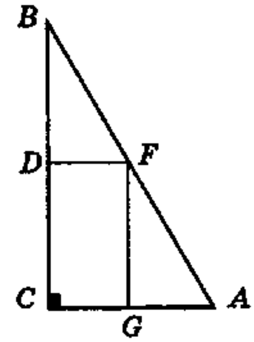
1. Прямоугольник, отличный от квадрата;
2. ромб, отличный от квадрата;
3. квадрат;
4. определить невозможно.

Часть 2

6. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 32 см, а его диагональ BD равна 9 см. Найдите периметр треугольника ABD.

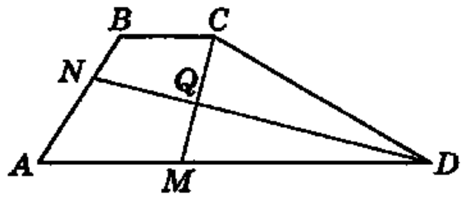


7. Катеты BC и AC прямоугольного треугольника ABC ($\angle C$ — прямой) соответственно равны 24 см и 10 см. Найдите периметр прямоугольника $CDFG$, если точка F — середина гипотенузы AB.



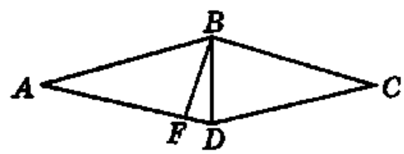
____

8. Найдите угол между биссектрисами CM и DN углов трапеции $ABCD$, прилежащих к боковой стороне CD.



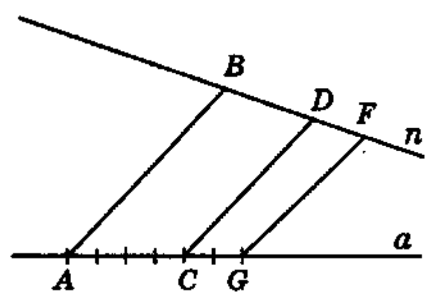
____

9. Найдите высоту BF ромба $ABCD$, если $\angle ADB = 75°$, а сторона ромба равна 5 см.



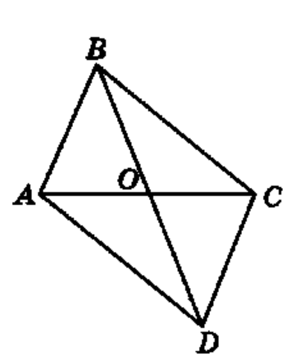
____

10. Параллельные прямые AB, CD и GF пересекают прямые a и n. Известно, что $CG = 4$ см; $DF = 5$ см; $BD = 10$ см. Найдите длину отрезка AC.



____

11. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, причем диагональ BD вдвое больше стороны AB. Угол между диагоналями равен 112°, а угол CDA равен 72°. Найдите угол CAD.



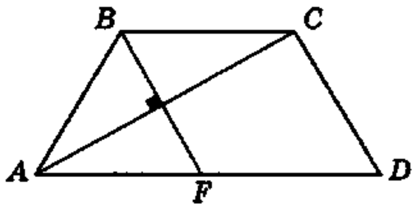
____

12. В прямоугольнике $ABCD$ проведены биссектрисы углов A и D, разбившие сторону BC на три отрезка: BF, FE и EC. Найдите длину отрезка FE, если стороны прямоугольника равны 5 см и 7 см.

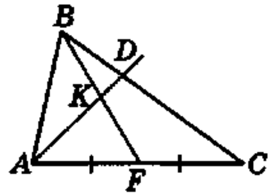
____

Часть 3

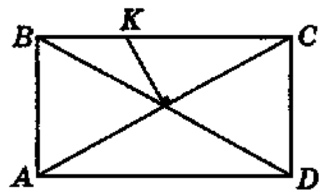
13. В трапеции $ABCD$ стороны AB и CD равны. Биссектриса тупого угла B перпендикулярна диагонали AC и отсекает от данной трапеции параллелограмм $FBCD$. Найдите сторону BC, если периметр трапеции равен 30 см.



14. Точка K — середина медианы BF треугольника ABC. Прямая AK пересекает сторону BC в точке D. Определите, в каком отношении точка D делит сторону BC, считая от вершины B.



15. В прямоугольнике $ABCD$ серединный перпендикуляр к диагонали AC пересекает сторону BC, равную 18 см, в точке K. Найдите длину отрезка KC, если угол ACB равен 30°.



§ 7. Теорема Пифагора

Целью теста, рекомендованного для данного параграфа, является оперативная проверка предметной компетентности учащихся восьмых классов по темам “Теорема Пифагора”, “Неравенство треугольника”, “Соотношение между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике”. Задания теста направлены на проверку основных умений, формируемых при изучении этих тем:

— выделять из данной конфигурации прямоугольные треугольники и заданные в условии задачи элементы и конфигурации;
— понимать, в каких ситуациях применима теорема Пифагора;
— применять обратную теорему Пифагора для определения вида треугольников;
— вычислять значения длин сторон, градусную меру углов, применяя определения косинуса, синуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника, теорему Пифагора и следствия из нее, неравенство треугольника и ранее изученные определения, признаки и свойства геометрических фигур;
— вычислять значения элементов прямоугольного треугольника, применяя определения косинуса, синуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника, теорему Пифагора и следствия из нее, ранее изученные определения, признаки и свойства геометрических фигур.

ТЕСТ 2

Вариант 1

Часть 1

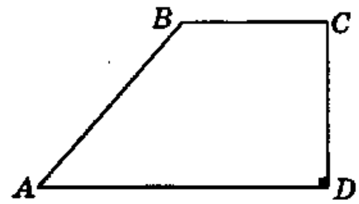
1. Сторона равностороннего треугольника равна 8 см. Найдите высоту треугольника.

1. 8 см; 2. $8\sqrt{3}$ см; 3. 4 см; 4. $4\sqrt{3}$ см.

2. Диагонали AC и BD параллелограмма $ABCD$ равны 8 см и 6 см, а сторона AB равна 5 см. Определите вид параллелограмма.

1. Прямоугольник;
2. ромб;
3. квадрат;
4. определить невозможно.

3. В прямоугольной трапеции $ABCD$ ($\angle D$ — прямой) основания равны 17 см и 9 см, а меньшая боковая сторона равна 15 см. Найдите большую боковую сторону.



1. 15 см;
2. 17 см;
3. 9 см;
4. 8 см.

4. Периметр равнобедренного треугольника равен 24 см. Одна из его сторон равна 6 см. Найдите длину боковой стороны.

1. 8 см; 2. 6 см; 3. 9 см; 4. 18 см.

5. В треугольнике ABC внешний и внутренний углы при вершине C равны. Определите, какая из сторон треугольника ABC является наибольшей.

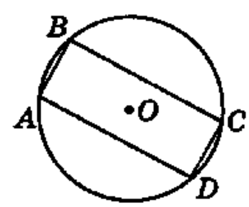
1. AB;
2. BC;
3. AC;
4. определить невозможно.

Часть 2

6. Найдите большую диагональ ромба, сторона которого равна 25 см, а меньшая диагональ — 14 см.

____

7. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольника со сторонами 7 см и 24 см.

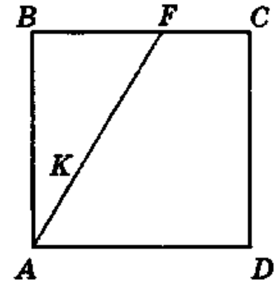


____

8. Две окружности, радиусы которых равны 7 см и 9 см, пересекаются в двух точках. Определите возможное наибольшее расстояние между центрами окружностей, если известно, что оно выражается целым числом.

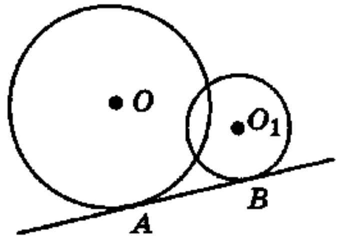
____

9. На стороне BC квадрата $ABCD$ отмечена точка F так, что $\angle FAD = 60°$. Найдите расстояние от вершины D до прямой AF, если $AB = \sqrt{3}$.



____

10. К двум окружностям с центрами в точках O и O_1 и радиусами, равными 12 см и 4 см, проведена общая касательная AB (A и B — точки касания). Найдите отрезок AB, если расстояние между центрами окружностей равно 15 см.

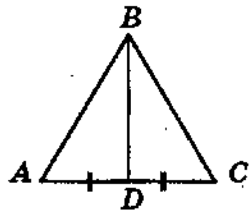


____

11. Найдите значение выражения $\sin 45° \cdot \operatorname{tg} 60° - \cos 45° \cdot \cos 30°$.

____

12. Сторона равностороннего треугольника равна a. Найдите отношение медианы этого треугольника к его стороне.



____

Часть 3

13. В треугольнике ABC высота, проведенная из вершины B, пересекает сторону AC в точке D. Докажите, что $AB < CB$, если угол CBD больше угла ABD.

14. Центры трех попарно касающихся внешним образом окружностей являются вершинами прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$). Радиус окружности с центром C равен 2 см, $AB = 13$ см. Найдите радиусы двух других окружностей.

15. Определите, сколько разных треугольников, отличных от равнобедренных и равносторонних, можно составить из отрезков длиной 1, 2, 4, 5 и 6?

Вариант 2

Часть 1

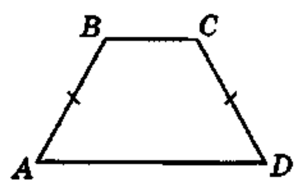
1. Катет прямоугольного равнобедренного треугольника равен 8 см. Найдите высоту треугольника.

1. 8 см; 2. $8\sqrt{2}$ см; 3. 4 см; 4. $4\sqrt{2}$ см.

2. Стороны параллелограмма равны 24 см и 7 см, а одна из его диагоналей равна 25 см. Определите его вид.

1. Прямоугольник, отличный от квадрата;
2. ромб, отличный от квадрата;
3. квадрат;
4. определить нельзя.

3. Найдите боковую сторону равнобокой трапеции $ABCD$, если длины ее оснований равны 11 см и 27 см, а высота равна 15 см.



1. 16 см;
2. 17 см;
3. $\sqrt{481}$ см;
4. $\sqrt{161}$ см.

4. Из одной точки окружности проведены два отрезка: хорда и радиус. Один отрезок равен 6 см, а другой — 12 см. Найдите радиус окружности.

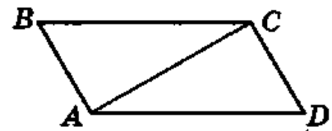
1. 8 см;
2. 6 см;
3. 9 см;
4. 12 см.

5. В треугольнике ABC сумма градусных мер углов A и B равна градусной мере угла C. Определите, какая из сторон треугольника ABC является наибольшей.

1. AC;
2. BC;
3. AB;
4. определить невозможно.

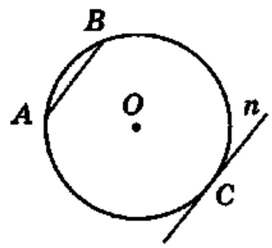
Часть 2

6. В параллелограмме $ABCD$ угол BAD равен $120°$, а стороны равны 8 см и 17 см. Найдите диагональ AC, если угол CAD равен $30°$.



____

7. Длина хорды AB, проведенной в окружности радиуса 25 см, равна 48 см. Найдите расстояние от хорды AB до параллельной ей касательной n (C — точка касания).

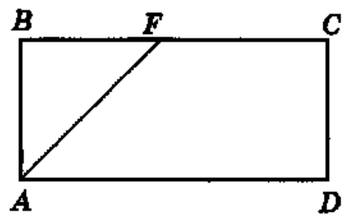


____

8. Длины сторон треугольника равны 10 и 12. Определите возможную наименьшую длину его третьей стороны, если известно, что она выражается целым числом.

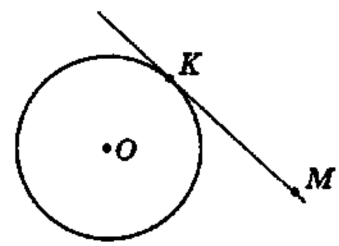
____

9. На стороне BC прямоугольника $ABCD$ отмечена точка F так, что треугольник ABF равнобедренный. Найдите расстояние от точки D до прямой AF, если $BC = \sqrt{2}$.



____

10. К окружности радиуса 20 см проведена касательная, на которой взята точка M на расстоянии 21 см от точки касания K. Найдите расстояние от точки M до центра окружности.

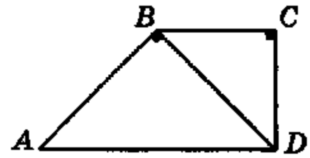


____

11. Найдите значение выражения $\sin 60° \cdot \cos 30° - \cos 60° \cdot \operatorname{tg} 45°$.

____

12. Диагональ BD прямоугольной трапеции $ABCD$ ($CD \perp AD$) отсекает от трапеции прямоугольный равнобедренный треугольник ABD. Найдите отношение диагонали BD трапеции к ее основанию AD, если основание BC равно a.



____

Часть 3

13. В треугольнике ABC серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает сторону AC в точке D. Докажите, что $AC > CB$.

14. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник, делит точкой касания его гипотенузу на отрезки 12 см и 5 см. Найдите радиус окружности.

15. Определите, сколько разных треугольников, отличных от равнобедренных и равносторонних, можно составить из отрезков длиной 1, 3, 4, 5 и 6?

§ 8. Декартовы координаты.
§ 9. Движение

Целью теста, рекомендованного к этим двум параграфам, является оперативная проверка предметной компетентности учащихся восьмых классов по темам "Вычисление координат середины отрезка и расстояния между двумя точками" и "Движение". Задания теста направлены на проверку основных умений, формируемых при изучении этих тем:

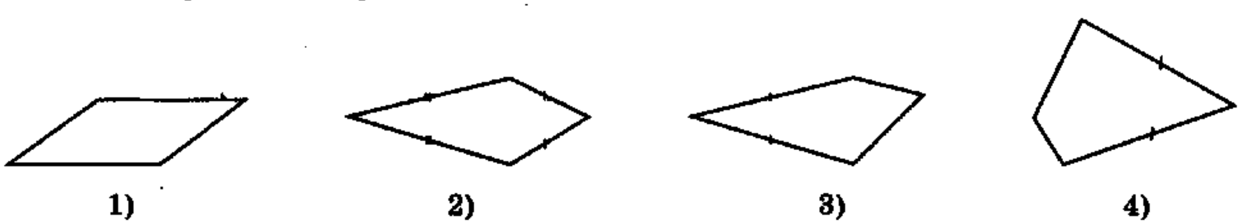
— вычислять значения координат середины отрезка по координатам его концов, находить длину отрезка по координатам его концов;
— распознавать на чертежах основные виды движений: центральную симметрию; поворот; осевую симметрию; параллельный перенос;
— вычислять значения длин сторон, градусную меру углов, применяя определения основных видов движений.

ТЕСТ 3

Вариант 1

Часть 1

1. Определите, какой из приведенных ниже четырехугольников имеет ось симметрии. Укажите номер этого четырехугольника в ответе.



1); 2); 3); 4).

2. Определите, сколько существует движений, переводящих квадрат сам в себя.
1. 2;
2. 4;
3. 6;
4. 8.

3. Треугольник имеет три оси симметрии. Определите вид треугольника.
1. Разносторонний;
2. равносторонний;
3. равнобедренный;
4. такой треугольник не существует.

4. При центральной симметрии относительно вершины C треугольника ABC его вершина A переходит в точку D, а вершина B — в точку F. Определите взаимное расположение прямых, содержащих высоты AM и DN треугольников ABC и FDC.
1. Прямые перпендикулярны;
2. прямые пересекаются, но не перпендикулярны;
3. прямые параллельны;
4. прямые совпадают.

5. При повороте на угол 90° вокруг точки пересечения диагоналей параллелограмм перешел сам в себя. Определите его вид.
1. Прямоугольник; отличный от квадрата;
2. ромб, отличный от квадрата;
3. квадрат;
4. такой параллелограмм не существует.

Часть 2

6. Найдите длину средней линии треугольника ABC с вершинами в точках $A(-3, -6)$, $B(-8, 6)$, $C(4, -10)$, параллельной стороне CB.

____

7. В треугольнике ABC с вершинами в точках $A(7, 3)$, $B(5, 1)$, $C(1, 14)$ проведена медиана CD. Найдите координаты ее основания.

____

8. Угол ABC, равный $\alpha\,(\alpha < 90°)$, при повороте на 60° в направлении от A к C переходит в угол A_1BC_1. Найдите угол ABC_1.

____

9. Дан прямоугольный равнобедренный треугольник ABC. При симметрии данного треугольника относительно прямой, содержащей его гипотенузу AB, вершина C треугольника перешла в точку C_1. Найдите длину отрезка CC_1, если катет треугольника равен 12 см.

____

10. Внутри угла AOB, равного 45°, отмечена точка M. Точки M_1 и M_2 симметричны точке M относительно сторон угла. Определите угол M_1OM_2.

____

11. Дан равносторонний треугольник ABC. При повороте треугольника на угол 180° вокруг середины одной из его сторон вершина A перешла в точку A_1, вершина B — в точку B_1, вершина C — в точку C_1. Найдите длину отрезка CC_1, если сторона треугольника равна 12 см.

____

12. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена медиана BD. При параллельном переносе вершина A перешла в точку D, а треугольник ABC в треугольник $DB'C'$. Найдите периметр четырехугольника $ABB'D$, если боковая сторона треугольника равна 5 см, а его основание — 8 см.

____

Часть 3

13. В треугольнике ABC вершина B симметрична точке K относительно биссектрисы внутреннего угла треугольника при вершине A. Найдите отрезок CK, если $AB = 3$ см, $AC = 5$ см.

14. Параллелограмм имеет только одну ось симметрии. Определите его вид.

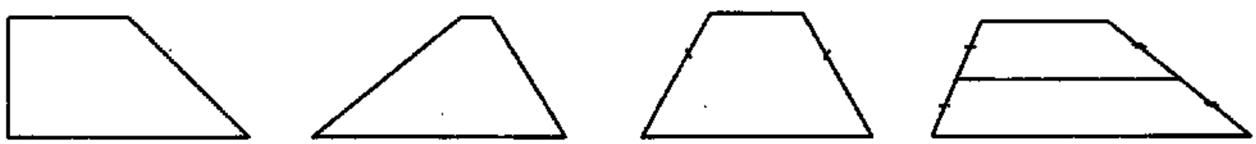
15. Две деревни A и B находятся по одну сторону от шоссе a. Определите, где на шоссе a надо расположить остановку автобуса K, чтобы сумма расстояний $AK + KB$ была наименьшей?

Замечание. Шоссе считается прямой линией.

Вариант 2

Часть 1

1. По данным рисунка определите, какая среди приведенных ниже трапеций имеет ось симметрии. Укажите номер этой трапеции в ответе.



1) 2) 3) 4)

1); 2); 3); 4).

2. Определите, сколько существует движений, переводящих ромб сам в себя.
1. 2;
2. 4;
3. 6;
4. 8.

3. Треугольник имеет только одну ось симметрии. Определите вид треугольника.
1. Разносторонний;
2. равносторонний;
3. равнобедренный;
4. такой треугольник не существует.

4. Дан треугольник ABC. При центральной симметрии относительно вершины C его вершина A перешла в точку D, а вершина B — в точку F. Определите взаимное расположение прямых, содержащих биссектрисы CM и CN треугольников ABC и FDC.
1. Прямые перпендикулярны;
2. прямые пересекаются, но не перпендикулярны;
3. прямые параллельны;
4. прямые совпадают.

5. При повороте на угол 120° вокруг центра вписанной окружности треугольник перешел сам в себя. Определите его вид.

1. Разносторонний;
2. равносторонний;
3. равнобедренный;
4. такой треугольник не существует.

Часть 2

6. В треугольнике ABC с вершинами в точках $A(7, 3)$, $B(5, 1)$, $C(1, 14)$ проведена медиана CD. Найдите ее длину.

____

7. Отрезок AB — диаметр окружности. Определите координаты центра окружности, если $A(1, 5)$, $B(7, -3)$.

____

8. Угол ABC, равный $\alpha\ (\alpha < 90°)$, при повороте на 60° в направлении от A к C переходит в угол A_1BC_1. Найдите угол CBA_1.

____

9. Дан прямоугольный равнобедренный треугольник ABC. При симметрии данного треугольника относительно прямой, содержащей его катет AC, вершина B треугольника перешла в точку B_1. Найдите длину отрезка BB_1, если гипотенуза треугольника равна 7 см.

____

10. Внутри угла AOB, равного 90°, отмечена точка M. Точки M_1 и M_2 симметричны точке M относительно сторон угла. Определите угол M_1OM_2.

____

11. Дан равносторонний треугольник ABC. При повороте треугольника на угол 180° вокруг вершины A, вершина B треугольника перешла в точку B_1, вершина C — в точку C_1. Найдите длину отрезка CC_1, если сторона треугольника равна 12 см.

____

12. В равностороннем треугольнике ABC проведена медиана BD. При параллельном переносе точка A перешла в точку D, а треугольник ABC — в треугольник $DB'C'$. Найдите периметр четырехугольника $ABB'D$, если сторона треугольника равна 6 см.

____

Часть 3

13. В треугольнике ABC вершина B симметрична точке K относительно биссектрисы внешнего угла треугольника при вершине A. Найдите отрезок CK, если $AB = 3$ см, $AC = 5$ см.

14. Параллелограмм имеет четыре оси симметрии. Определите его вид.

15. Две деревни A и B находятся по одну сторону от шоссе a. Определите, где на шоссе a надо расположить остановку автобуса K, чтобы расстояния от каждой из деревень до остановки были равными.

Замечание. Шоссе считается прямой линией.

§ 10. Векторы

Тест, рекомендованный к этому параграфу, направлен на оперативную проверку предметной компетентности учащихся восьмого класса по теме “Векторы”. Задания тестов направлены на проверку основных умений, формируемых при изучении этой темы:

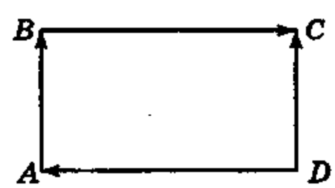
— понимать, что такое вектор, длина (модуль) вектора, равные векторы;
— изображать и обозначать вектор, различать его начало и конец в записи и на чертеже, распознавать, изображать и записывать одинаково направленные и противоположно направленные векторы, откладывать от любой точки вектор, равный данному;
— распознавать на чертеже и строить сумму и разность двух векторов, произведение вектора на число;
— находить координаты равных векторов, координаты суммы и разности векторов, координаты произведения вектора на число;
— вычислять значения длин сторон, градусную меру углов, применяя законы сложения векторов; законы произведения вектора на число;
— вычислять скалярное произведение векторов, применять необходимое и достаточное условие перпендикулярности векторов при решении задач.

ТЕСТ 4

Вариант 1

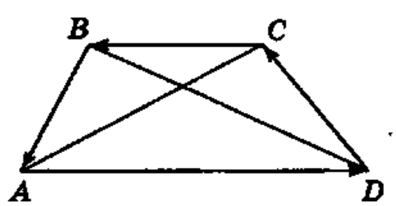
Часть 1

1. Четырехугольник *ABCD* — прямоугольник. Среди данных векторов укажите одну пару равных векторов.



1. $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$;
2. $\overline{BC}$ и $\overline{DA}$;
3. $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$;
4. $\overline{DC}$ и $\overline{DA}$.

2. Дана трапеция *ABCD*. Выразите вектор $\overline{CB}$ через векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, если $\bar{a} = \overline{BA}$, $\bar{b} = \overline{AD}$ и $\bar{c} = \overline{DC}$.

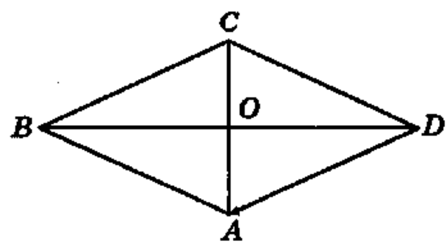


1. $\bar{c} + \bar{b} - \bar{a}$; 3. $\bar{b} + \bar{a} + \bar{c}$;
2. $\bar{a} - \bar{c} + \bar{b}$; 4. $-(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})$.

3. Найдите координаты вектора $\bar{c} = 2\bar{a} - \frac{1}{7}\bar{b}$, если $\bar{a}(-1; 2)$ и $\bar{b}(14; 7)$.

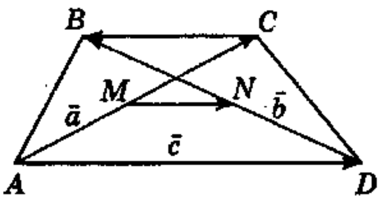
1. (0; 3); 2. (–4; 3); 3. (–5; 5); 4. 1(–4; 5).

4. Диагонали ромба *ABCD AC* и *BD* равны 10 см и 24 см соответственно. Найдите длину вектора $\overline{DA}$.



1. 5 см;
2. 12 см;
3. 13 см;
4. 17 см.

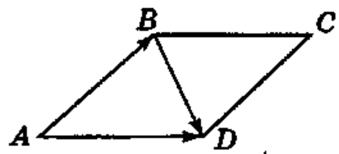
5. В трапеции $ABCD$ $\overline{AC} = \bar{a}$, $\overline{DB} = \bar{b}$ и $\overline{AD} = \bar{c}$. Точки M и N — середины диагоналей AC и BD соответственно. Выразите вектор $\overline{MN}$ через векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$.



1. $\bar{c} - \frac{1}{2}\bar{a} - \frac{1}{2}\bar{b}$;
2. $\bar{c} + \frac{1}{2}\bar{a} + \frac{1}{2}\bar{b}$;
3. $\bar{c} - \frac{1}{2}\bar{a} + \frac{1}{2}\bar{b}$;
4. $\bar{c} + \frac{1}{2}\bar{a} - \frac{1}{2}\bar{b}$.

Часть 2

6. В параллелограмме $ABCD$ $\overline{AB} = \bar{a}$; $\overline{AD} = \bar{b}$. Найдите координаты $\overline{BC}$, если $\bar{a}\,(2; -3)$; $\bar{b}\,(1; 0)$.



____

7. Вектор $\overline{AB} = \bar{a}$. Длина вектора $\overline{CD}$ в три раза больше длины вектора $\overline{AB}$, векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ противоположно направлены. Выразите вектор $\overline{CD}$ через вектор $\bar{a}$.

____

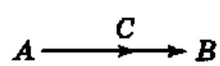
8. Упростите выражение $\overline{MB} + \overline{AM} + \overline{BA}$.

____

9. Даны три коллинеарных вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$. Известно, что $2\bar{a} + 0{,}5\bar{b} - \bar{c} = \bar{0}$ и $|\bar{a}| = 1$, $|\bar{b}| = 2$. Найдите $|\bar{c}|$, если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ сонаправленны.

____

10. Точка C лежит на отрезке AB, при этом $AC : CB = 2 : 1$. Найдите координаты вектора $\overline{AB}$, если $\overline{AB}$ (6; 15).



____

11. Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имеют общее начало в вершине равнобедренного треугольника, а их концы находятся в вершинах при основании этого треугольника. Найдите угол между векторами $\frac{\bar{a} + \bar{b}}{2}$ и $\frac{\bar{a} - \bar{b}}{2}$.

____

12. Определите, взаимное расположение ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если справедливо утверждение $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}|$.

____

Часть 3

13. Выразите вектор $\overline{CK}$ через вектор $\overline{KA}$, если $\overline{OK} = \frac{2}{7}\overline{OA} + \frac{5}{7}\overline{OC}$, где O — произвольная точка.

14. Докажите, что для любых двух векторов справедливо неравенство

$$|\vec{x} - \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|.$$

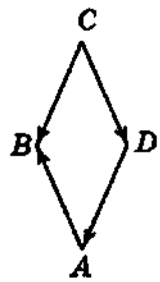
15. Дан квадрат $ABCD$. Докажите, что $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = 0$, где точка O является точкой пересечения диагоналей квадрата.

Вариант 2

Часть 1

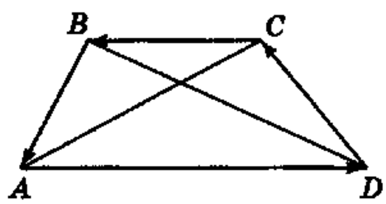
1. Четырехугольник $ABCD$ — ромб. Среди данных векторов укажите одну пару равных векторов.

1. $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$;
2. $\overline{BC}$ и $\overline{DA}$;
3. $\overline{AB}$ и $\overline{CB}$;
4. $\overline{CD}$ и $\overline{DA}$.



2. Дана трапеция $ABCD$. Выразите вектор $\overline{DC}$ через векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, если $\bar{a} = \overline{BA}$, $\bar{b} = \overline{AD}$ и $\bar{c} = \overline{CB}$.

1. $\bar{c} + \bar{b} - \bar{a}$;
2. $\bar{a} - \bar{c} + \bar{b}$;
3. $\bar{b} + \bar{a} + \bar{c}$;
4. $-(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})$.

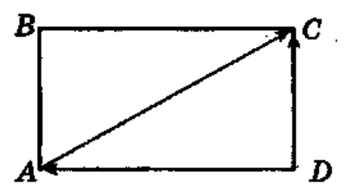


3. Найдите координаты вектора $\bar{c} = \bar{b} - \frac{1}{2}\bar{a}$, если $\bar{a}(-2; 1)$; $\bar{b}(1; 0)$.

1. (2; 1);
2. (1,5; 1);
3. (0; 1);
4. (−1; −0,5).

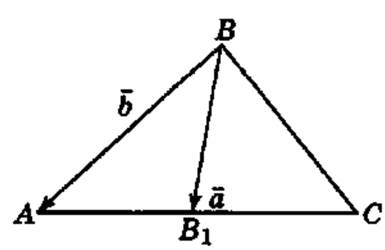
4. В прямоугольнике $ABCD$ стороны AB и AD равны 8 см и 15 см соответственно. Найдите длину вектора $\overline{AC}$.

1. 15 см;
2. 17 см;
3. 8 см;
4. 23 см.



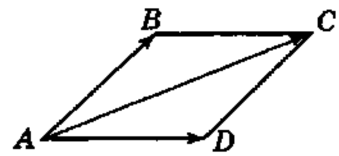
5. В треугольнике ABC $\overline{BA} = \bar{b}$ и $\overline{CA} = \bar{a}$. Отрезок BB_1 — медиана треугольника ABC. Выразите вектор $\overline{BB_1}$ через векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

1. $\frac{1}{2}\bar{a} - \frac{1}{2}\bar{b}$;
2. $\frac{1}{2}\bar{b} - \bar{a}$;
3. $\bar{b} - \frac{1}{2}\bar{a}$;
4. $\frac{1}{2}\bar{a} - \frac{1}{2}\bar{b}$.



Часть 2

6. В параллелограмме $ABCD$ $\overline{AB} = \bar{a}$; $\overline{AD} = \bar{b}$. Найдите координаты $\overline{AC}$, если $\bar{a}(2; -3)$; $\bar{b}(1; 0)$.



____

7. Вектор $\overline{AM} = \overline{m}$. Длина вектора $\overline{MN}$ равна половине длины вектора $\overline{AM}$, векторы $\overline{MN}$ и $\overline{AM}$ противоположно направлены. Выразите вектор $\overline{MN}$ через вектор $\overline{m}$.

____

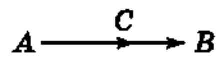
8. Упростите выражение $\overline{AK} - \overline{BC} + \overline{KC}$.

____

9. Даны три коллинеарных вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$. Известно, что $3\bar{a} - \bar{b} + 2\bar{c} = 0$ и $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{c}| = 4$. Найдите $|\bar{b}|$, если векторы $\bar{a}$ и $\bar{c}$ сонаправлены.

____

10. Точка C лежит на отрезке AB и $AC : CB = 2 : 1$. Найдите координаты вектора $\overline{AB}$, если $\overline{AC} = \bar{a}$ (6; 8).



____

11. Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имеют общее начало в одной из вершин ромба, а их концы находятся в соседних вершинах этого ромба. Найдите угол между векторами $\dfrac{\bar{a}+\bar{b}}{2}$ и $\dfrac{\bar{a}-\bar{b}}{2}$.

____

12. Найдите скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ сонаправлены и $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 1$.

____

Часть 3

13. Выразите вектор $\overline{AK}$ через вектор $\overline{KC}$, если $\overline{OK} = \frac{3}{5}\overline{OA} + \frac{2}{5}\overline{OC}$, где O — произвольная точка.

14. Докажите, что для любых двух векторов справедливо неравенство

$$|\vec{x} + \vec{y}| \leqslant |\vec{x}| + |\vec{y}|.$$

15. Дан прямоугольник $ABCD$. Докажите, что $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = 0$, где точка O является точкой пересечения диагоналей прямоугольника.

Учебник «Геометрия. 7–9» И.Ф. Шарыгина

Глава 5. Параллельные прямые и углы

Целью теста, рекомендованного к данной главе, является оперативная проверка компетентности учащимися восьмого класса по темам "Параллельные прямые", "Сумма углов треугольника", "Центральные и вписанные углы", "Четыре замечательные точки треугольника", " Вписанная и описанная окружности". Задания теста направлены на проверку основных умений, формируемых при изучении этих тем:

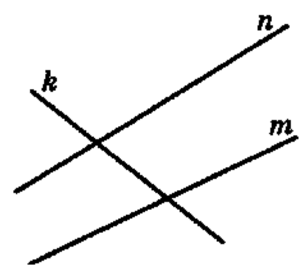
— распознавать и изображать на чертежах углы, образованные при пересечении двух прямых секущей, внешний угол треугольника, центральный угол и дугу окружности, соответствующую данному центральному углу, и угол, вписанный в окружность, используя их определения;
— непосредственно применять признаки параллельности прямых и свойства углов, образованных при пересечении двух прямых секущей, аксиому параллельных прямых, следствия из нее, свойства углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей, теоремы о сумме углов треугольника и о внешнем угле треугольника; теоремы об углах, связанных с окружностью, теоремы об окружности, вписанной в треугольник, и об окружности, описанной около треугольника;
— вычислять значения длин сторон, градусную меру углов, применяя признаки параллельности прямых и свойства углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей, теоремы о сумме углов треугольника и внешнем угле треугольника; определения центрального и вписанного углов, об углах, связанных с окружностью, теоремы об окружности, вписанной в треугольник, и об окружности, описанной около треугольника, признаки принадлежности четырех точек плоскости одной окружности, теорему о дуге, вмещающей данный угол;
— применять изученные теоремы и метод геометрических мест при решении задач на построение.

ТЕСТ 1

Вариант 1

Часть 1

1. Сумма внутренних односторонних углов, образованных при пересечении двух прямых n и m секущей k, равна $90°$. Определите взаимное расположение прямых n и m.

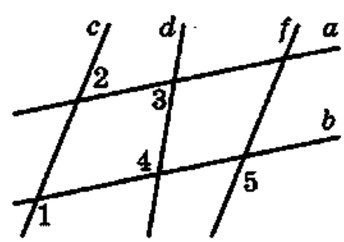


1. Перпендикулярны;
2. пересекаются, но не перпендикулярны;
3. параллельны;
4. такая ситуация невозможна.

2. Определите вид треугольника, если сумма двух его углов меньше третьего угла.

1. Остроугольный;
2. прямоугольный;
3. тупоугольный;
4. определить не возможно.

3. Дано $\angle 1 = \angle 5$, $\angle 4 \neq \angle 5$. Определите, какие из трех прямых c, d и f параллельны.



1. $c \parallel d \nparallel f$;
2. $c \nparallel d \parallel f$;
3. $c \parallel f \nparallel d$;
4. $c \nparallel d \nparallel f$.

4. Угол между диаметром AB и хордой AC окружности равен $60°$. Через точку C проведена касательная к окружности, которая пересекает прямую AB в точке D. Определите вид треугольника ACD.

1. Равнобедренный;
2. равносторонний;
3. разносторонний;
4. определить невозможно.

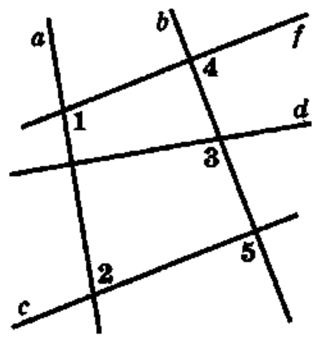
5. Определите вид треугольника, если центр вписанной в него окружности совпадает с центром описанной около него окружности.

1. Равнобедренный;
2. равносторонний;
3. разносторонний;
4. такой треугольник не существует.

Часть 2

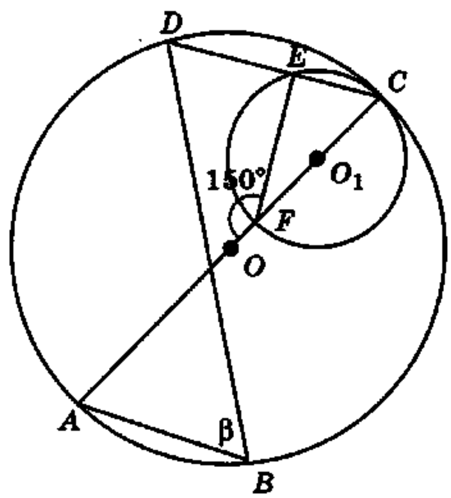
6. Дано: $\angle 1 = 108°$; $\angle 2 = 72°$; $\angle 5 = 83°$. Найдите $\angle 4$.

____



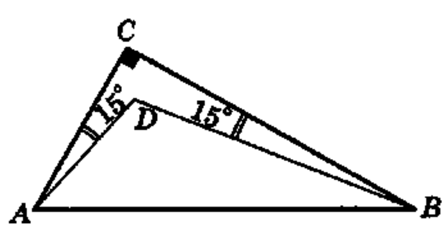
7. Две окружности касаются друг друга в точке C. Диаметр AC окружности с центром в точке O проходит через точку O_1 — центр второй окружности и образует с хордой FE угол, равный $150°$. Найдите градусную меру угла β.

____

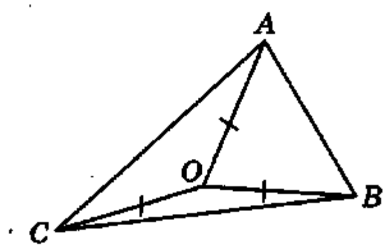


8. Внутри прямоугольного треугольника AB (C — прямой) отмечена точка D такая, что $\angle CAD = \angle CBD = 15°$. Найдите угол ADB.

____

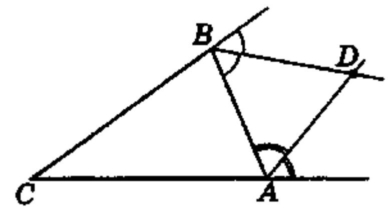


9. Внутри треугольника ABC отмечена точка O такая, что $OA = OB = OC$. Известно, что $\angle BOC = 160°$, $\angle COA = 130°$. Найдите угол BCA.



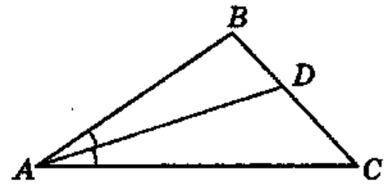
____

10. В треугольнике ABC биссектрисы внешних углов при вершинах B и A пересекаются в точке D. Найдите $\angle BCA$, если $\angle BDA = 70°$.



____

11. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса AD. Найдите угол BDA, если угол при основании относится к углу при вершине как $1 : 4$.



____

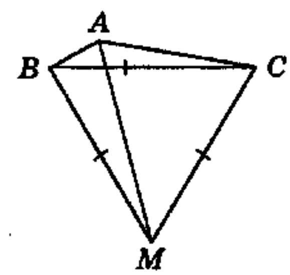
12. Вершины четырехугольника $ABCD$ лежат на окружности и разбивают ее на четыре дуги, градусные меры которых относятся как $3 : 7 : 5 : 3$. Найдите больший угол четырехугольника.

____

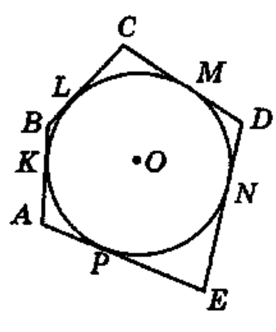
Часть 3

13. Определите, что является геометрическим местом центров окружностей, проходящих через две данные точки.

14. В треугольнике ABC угол B равен $20°$, угол C равен $10°$. Вне треугольника выбрана точка M так, что треугольник CMB – равносторонний (точки M и A лежат по разные стороны от прямой BC). Найдите угол MAC.

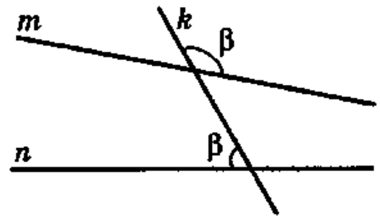


15. Окружность с центром в точке O касается сторон пятиугольника $ABCDE$. Известно, что $AB = 5$, $BC = 6$, $CD = 7$, $DE = 8$ и $AE = 9$. Определите, на какие отрезки точка касания K делит сторону AB.



Вариант 2

Часть 1

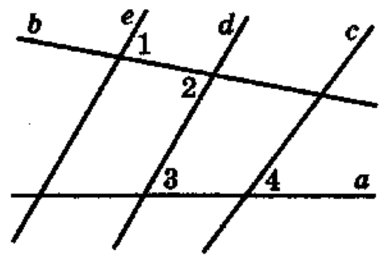


1. Равные углы, образованные при пересечении прямых n и m секущей k обозначены буквой β. Определите взаимное расположение прямых n и m, если $\beta = 130°$.

1. Прямые n и m перпендикулярны;
2. прямые n и m пересекаются, но не перпендикулярны;
3. прямые n и m параллельны;
4. такая ситуация невозможна.

2. Определите вид треугольника, если сумма двух его углов равна третьему углу.

1. Остроугольный;
2. прямоугольный;
3. тупоугольный;
4. определить невозможно.



3. Дано $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 \neq \angle 4$. Определите, какие из трех прямых c, d и e параллельны.

1. $c \parallel d \nparallel e$;
2. $c \nparallel d \parallel e$;
3. $c \parallel e \nparallel d$;
4. $c \nparallel d \nparallel e$.

4. Угол между диаметром AB и хордой AC окружности равен $70°$. Через точку C проведена касательная к окружности, которая пересекает прямую AB в точке D. Определите вид треугольника ACD.

1. Равнобедренный;
2. равносторонний;
3. разносторонний;
4. определить невозможно.

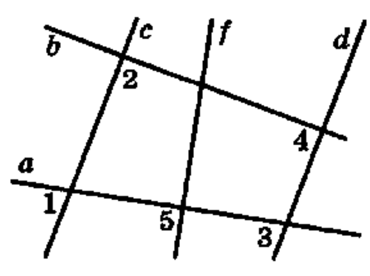
5. Определите вид треугольника, если центр вписанной в него окружности лежит на одном из серединных перпендикуляров.

1. Равнобедренный;
2. равносторонний;
3. разносторонний;
4. такой треугольник не существует.

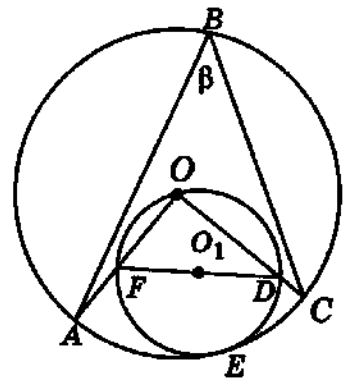
Часть 2

6. Дано: $\angle 2 = \angle 4 = 90°$; $\angle 1 = 83°$. Найдите $\angle 3$.

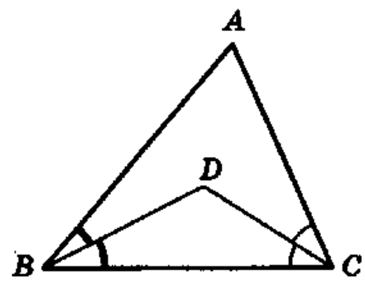
____



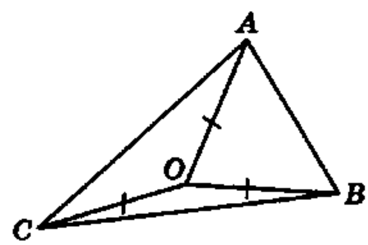
7. Две окружности касаются друг друга в точке E. Окружность с центром в точке O_1 проходит через точку O — центр второй окружности. Найдите градусную меру угла β.



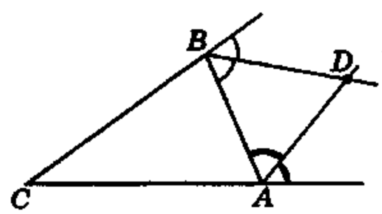
8. В треугольнике ABC угол BAC равен $64°$. Биссектрисы углов ABC и ACB пересекаются в точке D. Найдите угол CDB.



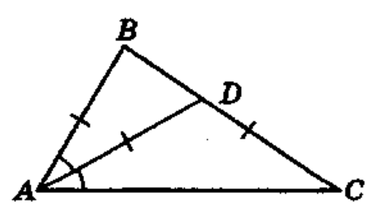
9. Внутри треугольника ABC отмечена точка O такая, что $OA = OB = OC$. Известно, что $\angle ABC = 65°$, $\angle CAB = 80°$. Найдите угол AOB.



10. В треугольнике ABC биссектрисы внешних углов при вершинах A и B пересекаются в точке D. Найдите $\angle BDA$, если $\angle BCA = 28°$.



11. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD угла A. Найдите угол ABC треугольника ABC, если $AD = AB = DC$.

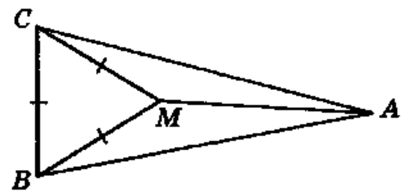


12. Вершины четырехугольника $ABCD$ лежат на окружности и разбивают ее на четыре дуги, градусные меры которых последовательно равны $56°$, $74°$, $97°$ и $133°$. Найдите градусную меру меньшего угла четырехугольника.

Часть 3

13. Найдите геометрическое место центров окружностей, касающихся прямой в данной точке.

14. В треугольнике ABC угол B равен $80°$, угол C равен $70°$. Внутри треугольника выбрана точка M так, что треугольник CMB — равносторонний. Найдите угол MAB.



15. Дан пятиугольник $ABCDE$, стороны которого равны $AB = 6$, $BC = 8$, $CD = 7$, $DE = 9$ и $AE = 4$. Определите, могут ли стороны данного пятиугольника касаться одной окружности.

Глава 6. **Подобие**

Целью теста, рекомендованного к данной главе, является оперативная проверка компетентности учащимися восьмого класса по темам “Четырехугольники”, “Параллелограмм”, “Прямоугольник”, “Ромб. Квадрат”, “Трапеция”, “Средняя линия треугольника и трапеции”, “Признаки подобия треугольников ”. Задания тестов направлены на проверку основных умений, формируемых при изучении этих тем:

— распознавать и изображать на чертежах четырехугольники: параллелограммы, трапеции, прямоугольники, ромбы и квадраты и их элементы; среднюю линию треугольника и среднюю линию трапеции; пропорциональные отрезки и подобные треугольники;
— выделять из данной конфигурации подобные треугольники;
— непосредственно применять определения трапеции, средней линии треугольника и трапеции, определения, свойства и признаки параллелограмма, прямоугольника, ромба и квадрата, теоремы о средней линии треугольника и средней линии трапеции; признаки подобия треугольников;
— выделять из данной конфигурации заданные в условии задачи элементы фигур;
— вычислять значения длин сторон, градусную меру углов, периметры треугольников, четырехугольников, применяя определения, признаки и свойства параллелограмма, прямоугольника, ромба и квадрата, определение трапеции, теоремы о средней линии треугольника и средней линии трапеции, теорему Фалеса и ранее изученные признаки и свойства треугольников; признаки подобия треугольников.

ТЕСТ 2

Вариант 1

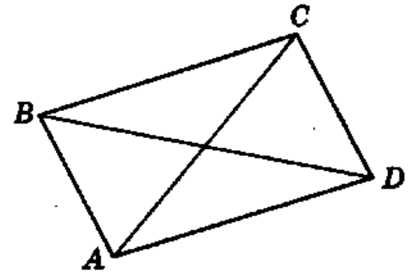
Часть 1

1. Среди приведенных ниже троек чисел определите тройку чисел, пропорциональных числам 2, 3 и 4.

1. 2, 3, 8;
2. 2, 6, 4;
3. 4, 6, 12;
4. 6, 9, 12.

2. В четырехугольнике $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$) каждый из углов BAC и CDB равен 67°. Определите вид четырехугольника $ABCD$.

1) Ромб, отличный от квадрата;
2) прямоугольник, отличный от квадрата;
3) квадрат;
4) трапеция.

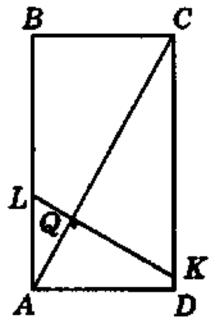


3. Определите, вершинами какого четырехугольника являются середины сторон ромба, отличного от квадрата.

1. Параллелограмма, отличного от прямоугольника и ромба;
2. прямоугольника, отличного от квадрата;
3. ромба, отличного от квадрата;
4. квадрата.

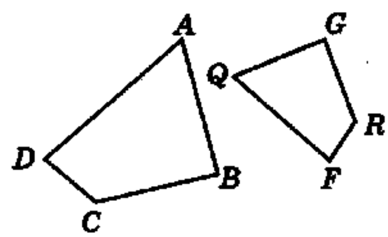
4. В прямоугольнике $ABCD$ отрезок KL перпендикулярен диагонали AC и пересекает ее в точке Q, $CQ = 16$ см. Найдите длину отрезка QK, если $AB : BC = 4 : 3$.

1. 24 см;
2. 12 см;
3. 4 см;
4. 8 см.



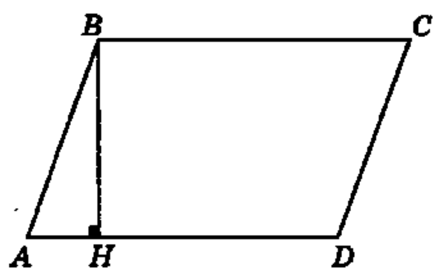
5. Четырехугольники $QGRF$ и $ABCD$ подобны и их сходственные стороны относятся, как 3 : 5. Периметр четырехугольника $ABCD$ на 12 см больше периметра четырехугольника $QGRF$. Найдите периметр четырехугольника $QGRF$.

1. 18 см; 3. 7,5 см;
2. 12 см; 4. 4,5 см

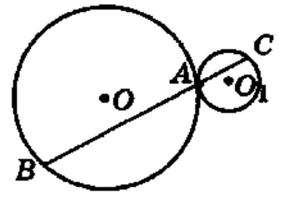


Часть 2

6. Высота BH параллелограмма $ABCD$ отсекает от него равнобедренный треугольник. Найдите градусную меру угла ADC.

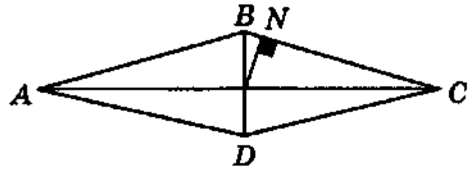


7. Две окружности с радиусами 9 см и 3 см касаются внешним образом в точке A, через которую проходит их общая секущая BC. Найдите длину отрезка AB, если AC равен 5 см.

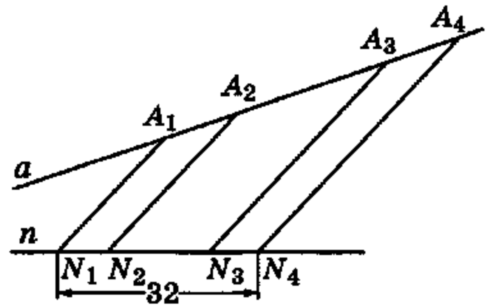


8. Углы ABC и ADC выпуклого четырехугольника $ABCD$ равны, точка O — середина диагонали AC. Найдите сторону AD, если стороны AB и BC равны 4 см и 7 см соответственно.

9. В ромбе $ABCD$ с острым углом 30° расстояние от точки пересечения диагоналей до стороны ромба равно 3 см. Найдите периметр ромба.



10. Параллельные прямые A_1N_1, A_2N_2, A_3N_3 и A_4N_4 пересекают прямые a и n. Известно, что $A_1A_2 : A_2A_3 : A_3A_4 = 1 : 2 : 1$. Отрезок N_1N_4 равен 32 см. Найдите длину отрезка N_1N_3.

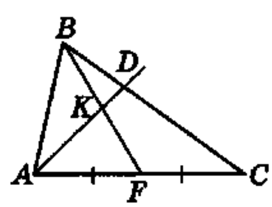


11. В треугольнике ABC проведены медианы BL и CK. Найдите расстояние между их серединами, если $BC = 16$ см.

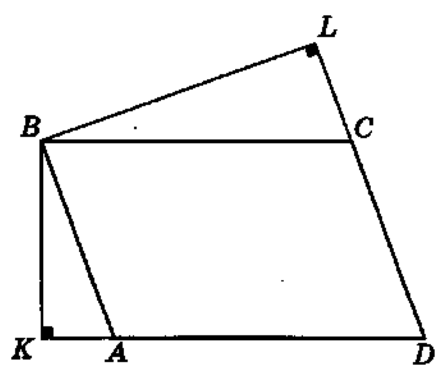
12. Отрезок, параллельный стороне прямоугольника, разбивает его на два подобных прямоугольника. Найдите большую сторону большего из полученных прямоугольников, если стороны данного прямоугольника 20 см и 8 см.

Часть 3

13. Через точку D, лежащую на стороне BC, проведен луч AD, пересекающий медиану BF в точке K. В каком отношении точка K делит медиану BF, считая от вершины B, если $BD : DC = 1 : 2$.



14. Угол между высотами параллелограмма, проведенными из вершины его острого угла, в 4 раза больше этого угла. Найдите острый угол параллелограмма.



15. Докажите, что в выпуклом четырехугольнике середина отрезка, соединяющего середины его диагоналей, совпадает с точкой пересечения отрезков, соединяющих середины противолежащих сторон.

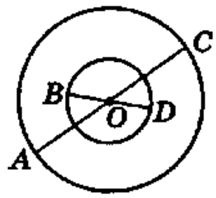
Вариант 2

Часть 1

1. Среди приведенных ниже троек чисел определите тройку чисел, пропорциональных числам 1, 4 и 5.

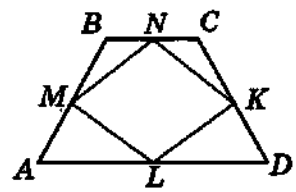
1. 2, 4, 5;
2. 2, 8, 10;
3. 1, 4, 10;
4. 2, 8, 5.

2. В каждой из двух окружностях с общим центрами в точке O проведены диаметры AC и BD так, что $\angle AOB = 45°$. Определите, вершинами какого четырехугольника являются точки A, B, C и D.



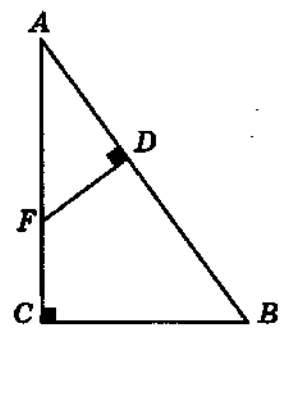
1. Параллелограмма, отличного от прямоугольника и ромба;
2. прямоугольника;
3. ромба;
4. трапеции.

3. Диагонали равнобедренной трапеции $ABCD$ перпендикулярны. Середины сторон трапеции являются вершинами четырехугольника $KLMN$. Определите вид четырехугольника $KLMN$.



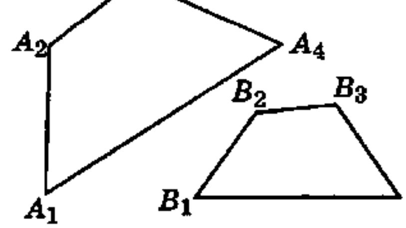
1. Прямоугольник, отличный от квадрата;
2. ромб, отличный от квадрата;
3. квадрат;
4. определить нельзя.

4. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C$ — прямой), отрезок DF перпендикулярен к гипотенузе AB и равен 6 см. Найдите гипотенузу треугольника FAD, если $AB = 16$ см, $BC = 12$ см.



1. 16 см;
2. 8 см;
3. 6 см;
4. 12 см.

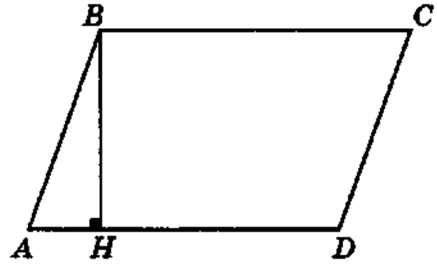
5. Четырехугольники $A_1A_2A_3A_4$ и $B_1B_2B_3B_4$ подобны и их стороны A_1A_4 и B_1B_4 сходственные. Периметр четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$ относится к стороне A_1A_4, как 5 : 2. Найдите отношение стороны B_1B_4 к периметру четырехугольника $B_1B_2B_3B_4$.



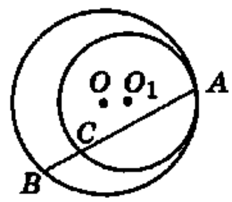
1. 5 : 2;
2. 7 : 5;
3. 5 : 1;
4. 2 : 5.

Часть 2

6. В параллелограмме $ABCD$ высота BH в два раза меньше стороны CD. Найдите градусную меру угла ABC.



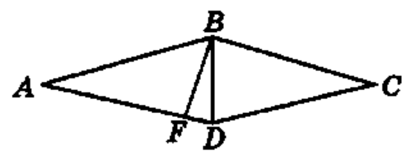
7. Две окружности радиусов 12 см и 9 см касаются внутренним образом в точке A, через которую проходит их общая секущая AB. Найдите длину отрезка AB, если отрезок AC равен 18 см.



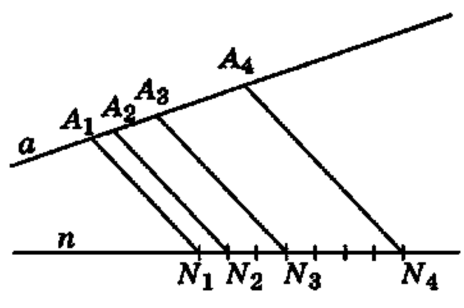
8. Стороны AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ параллельные, а точка O пересечения диагоналей делит диагональ AC пополам. Найдите сторону AD, если стороны AB и BC равны 4 см и 7 см соответственно.

1. 4 см;
2. 7 см;
3. 11см;
4. определить невозможно.

9. Найдите высоту BF ромба $ABCD$, если $\angle ADB = 75°$, а сторона ромба равна 5 см.



10. Параллельные прямые A_1N_1, A_2N_2, A_3N_3 и A_4N_4 пересекают прямые a и n. Известно, что $N_1N_2 : N_2N_3 : N_3N_4 = 1 : 2 : 4$. Отрезок A_1A_2 равен 7 см. Найдите длину отрезка A_3A_4.

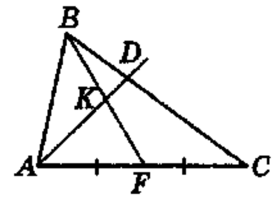


11. В треугольнике ABC проведены медианы BL и CK. Найдите сторону BC, если расстояние между их серединами равно 4 см.

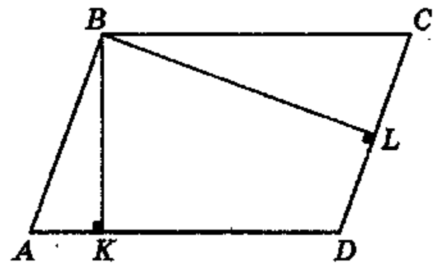
12. Отрезок, параллельный стороне прямоугольника, разбивает его на два подобных прямоугольника. Найдите большую сторону меньшего из полученных прямоугольников, если стороны данного прямоугольника равны 6 см и 15 см.

Часть 3

13. Точка K — середина медианы BF треугольника ABC. Прямая AK пересекает сторону BC в точке D. Определите, в каком отношении точка D делит сторону BC, считая от вершины B.



14. Угол между высотами BL и BK параллелограмма $ABCD$, проведенными из вершины тупого угла, в 3 раза меньше этого угла. Найдите градусную меру угла BAD.



15. Две противоположные стороны выпуклого четырехугольника лежат на перпендикулярных прямых. Докажите, что расстояние между серединами двух других сторон четырехугольника равно расстоянию между серединами его диагоналей.

Глава 7. Метрические соотношения в треугольнике и окружности

Целью теста, рекомендованного к данной главе, является оперативная проверка предметной компетентности учащихся восьмых классов по темам “Теорема Пифагора”, “Решение треугольников”, “Соотношение между отрезками, возникающими при пересечении прямых с окружностью”. Задания теста направлены на проверку основных умений, формируемых при изучении этих тем:

— определять, в каких ситуациях применима теорема Пифагора;

— применять обратную теорему Пифагора и теорему косинусов для определения вида треугольников;

— вычислять значения длин сторон и градусную меру углов треугольников, применяя определения косинуса, синуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника, теорему Пифагора и следствия из нее, теоремы косинусов и признаки и свойства геометрических фигур;

— вычислять значения косинуса, синуса и тангенса углов треугольника, применяя определения косинуса, синуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника и формулы, выражающие тригонометрические функции тупого угла через тригонометрические функции острого угла;

— вычислять длины радиусов и диаметров, хорд, секущих и касательных, применяя свойства хорд и секущих окружностей.

ТЕСТ 3

Вариант 1

Часть 1

1. В треугольнике ABC проведена медиана BM. Определите, какая из его сторон AB или BC больше, если $\angle BMA = 80°$.

1. $BC = AB$; 2. $BC > AB$; 3. $BC < AB$; 4. определить невозможно.

2. Определите, сколько решений имеет следующая задача. Решать задачу не надо.

Стороны параллелограмма 8 см и 6 см, а одна из высот — 10 см. Найдите вторую высоту параллелограмма.

1. Одно;
2. два;
3. три;
4. решений нет.

3. Стороны треугольника равны 8 см, 15 см и 16 см. Определите вид этого треугольника.

1. Тупоугольный;
2. прямоугольный;
3. остроугольный;
4. такой треугольник не существует.

4. Определите, сколько решений имеет следующая задача. Решать задачу не надо.

В треугольнике ABC сторона AB равна 21 см, сторона BC равна 7 см, а угол C равен $33°$. Найдите сторону AC.

1. Одно;
2. два;
3. три;
4. решений нет.

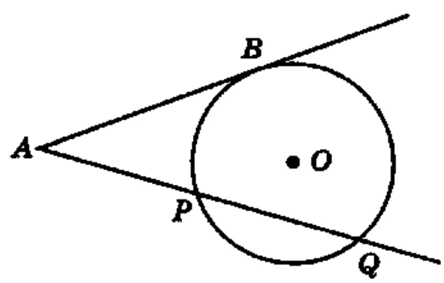
5. В четырехугольнике $ABCD$ стороны BC и AD параллельны. Из вершины C к стороне AB опущен перпендикуляр CF, его длина равна 15 см. Отрезок FB равен 8 см, а сторона AD равна 17 см. Определите вид четырехугольника $ABCD$.

1. Параллелограмм;
2. прямоугольная трапеция;
3. трапеция, отличная от равнобедренной;
4. равнобедренная трапеция.

Часть 2

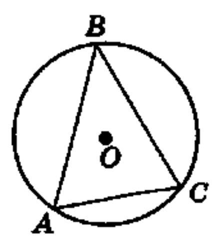
6. Из точки A к окружности с центром в точке O проведены секущая AQ и касательная AB. Найдите отрезок AB, если $AQ = 9$ см и $AP = 4$ см.

____



7. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $AC = 2$ см, $\angle ABC = 45°$.

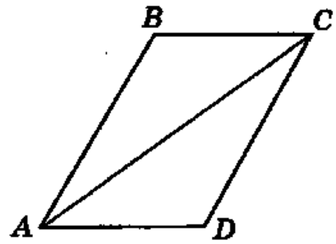
____



8. Найдите значение выражения $\sin 45° \cdot \operatorname{tg} 60° - \cos 45° \cdot \cos 30°$.

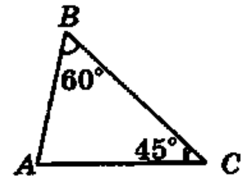
____

9. Найдите меньший угол параллелограмма, если его стороны равны 1 и $\sqrt{3}$, а одна из диагоналей равна $\sqrt{7}$.



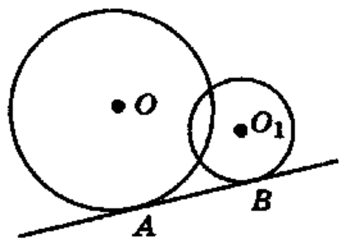
____

10. В треугольнике ABC сторона AC равна 8 см, один из углов, прилежащих к этой стороне, равен $45°$, а угол, противолежащий ей, равен $60°$. Найдите сторону, противолежащую углу $45°$.



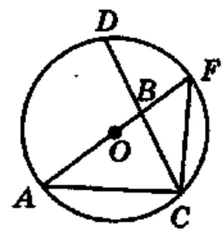
____

11. К двум окружностям с центрами в точках O и O_1 и радиусами, равными 12 см и 4 см, проведена общая касательная AB (A и B – точки касания). Найдите отрезок AB, если расстояние между центрами окружностей равно 15 см.



____

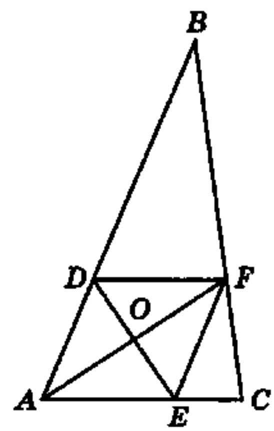
12. Стороны AB и BC треугольника ABC соответственно равны 9 см и 6 см. Центр окружности (точка O), проходящей через вершины A и C треугольника ABC, лежит на стороне AB. Точки D и F являются точками пересечения продолжения сторон AB и BC с окружностью. Найдите радиус окружности, если BD равен 3 см.



____

Часть 3

13. В треугольник ABC вписан ромб $ADFE$ так, что угол A у них общий, а противоположная ему вершина F лежит на стороне BC. Диагонали ромба равны 8 см и 6 см. Найдите отношение $BF : FC$, если $AB = 15$ см.



14. Центры трех попарно касающихся внешним образом окружностей являются вершинами прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$). Радиус окружности с центром C равен 2 см, $AB = 13$ см. Найдите радиусы двух других окружностей.

15. Найдите геометрическое место середин всех хорд данной окружности, имеющих заданную длину.

Вариант 2

Часть 1

1. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Определите, какая из его сторон — BC или CD — меньше, если угол AOB — острый.

1. $BC > CD$;
2. $BC = CD$;
3. $BC < CD$;
4. определить невозможно.

2. Определите, сколько решений имеет следующая задача. Решать задачу не надо.

Стороны параллелограмма 15 см и 6 см, а одна из его высот — 18 см. Найдите вторую высоту параллелограмма.

1. Одно;
2. два;
3. три;
4. решений нет.

3. Стороны треугольника равны 3 см, 2 см и $\sqrt{3}$ см. Определите вид этого треугольника.

1. Остроугольный;
2. прямоугольный;
3. тупоугольный;
4. такой треугольник не существует.

4. Определите, сколько решений имеет следующая задача. Решать задачу не надо.

В треугольнике ABC сторона AB равна 8 см, сторона BC равна 16 см, а синус угла C равен 0,4. Найдите угол A.

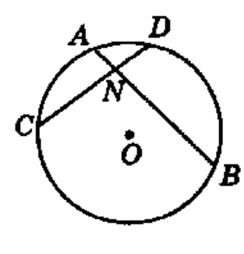
1. Одно;
2. два;
3. три;
4. решений нет.

5. В четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD параллельны. Из вершины C к стороне AB опущен перпендикуляр CF, его длина равна 12 см. Отрезок FB равен 5 см, а сторона AD равна 15 см. Определите вид четырехугольника $ABCD$.

1. Параллелограмм;
2. прямоугольная трапеция;
3. трапеция, отличная от равнобедренной;
4. равнобедренная трапеция.

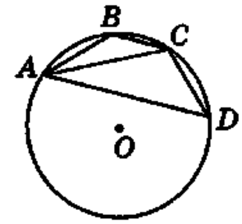
Часть 2

6. Две хорды AB и CD окружности пересекаются в точке N. Найдите длину отрезка AN, если $BN = 30$ см, $CN = 15$ см и $DN = 6$ см.



____

7. Найдите диагональ AC равнобокой трапеции $ABCD$, если $\angle ABC = 135°$, а радиус окружности, описанной около трапеции, равен 5 см.

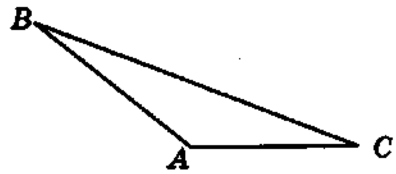


____

8. Найдите значение выражения $\sin 60° \cdot \cos 30° - \cos 60° \cdot \operatorname{tg} 45°$.

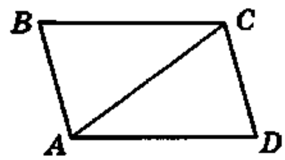
____

9. В треугольнике стороны равны 1, $\sqrt{3}$ и $\sqrt{7}$. Найдите угол, противолежащий большей стороне треугольника.



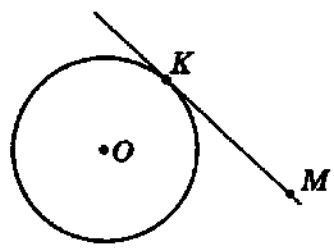
____

10. Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ делит его угол DAB на части BAC и CAD, равные 60° и 45° соответственно. Найдите большую сторону параллелограмма, если его меньшая сторона равна 4 см.



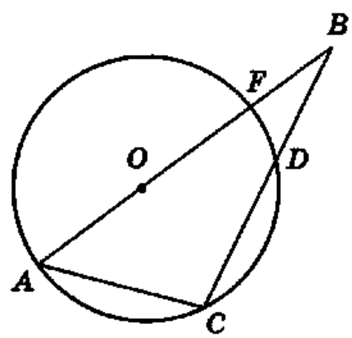
____

11. К окружности радиуса 20 см проведена касательная, на которой взята точка M на расстоянии 21 см от точки касания K. Найдите расстояние от точки M до центра окружности.



____

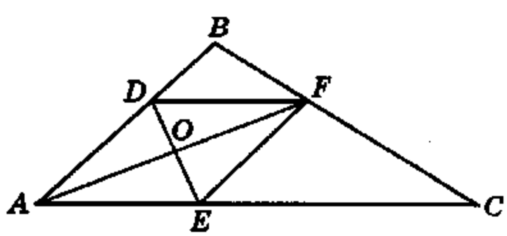
12. Стороны AB и BC треугольника ABC соответственно равны 15 см и 12 см. Центр окружности (точка O), проходящей через вершины A и C треугольника ABC, лежит на стороне AB. Точки F и D являются точками пересечения сторон AB и BC с окружностью. Найдите радиус окружности, если BD равен 5 см.



____

Часть 3

13. В треугольник ABC вписан ромб $ADFE$ так, что угол A у них общий, а противоположная ему вершина F лежит на стороне треугольника BC. Диагонали ромба равны 12 см и 16 см. Найдите отношение $BF : FC$, если $AB = 15$ см.



14. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник, делит точкой касания его гипотенузу на отрезки 12 см и 5 см. Найдите радиус окружности.

15. На окружности с центром O дана точка A. Найдите геометрическое место середин всех хорд этой окружности, проведенных из точки A.

Глава 8. Задачи и теоремы геометрии

Целью теста, рекомендованного к данной главе, является оперативная проверка предметной компетентности учащихся восьмых классов по темам "Замечательные точки треугольника", "Вписанные и описанные четырехугольники", "Геометрическое место точек". Задания теста направлены на проверку основных умений, формируемых при изучении этих тем:

— распознавать и изображать на чертежах точки пересечения биссектрис, медиан, высот, вписанные и описанные четырехугольники;
— вычислять значения длин сторон и градусную меру углов треугольников и четырехугольников, применяя теоремы о замечательных точках треугольника, о свойстве биссектрисы угла треугольника, о вписанных и описанных четырехугольниках;
— решать задачи на построение, применяя метод подобия, метод геометрических мест точек.

ТЕСТ 4

Вариант 1

Часть 1

1. Даны три прямые k, l и m. Прямые k и l параллельны, а прямая m их пересекает. Определите, сколько существует окружностей, одновременно касающихся каждой из трех прямых k, l и m.

1. Ни одной; 3. две;
2. одна; 4. три.

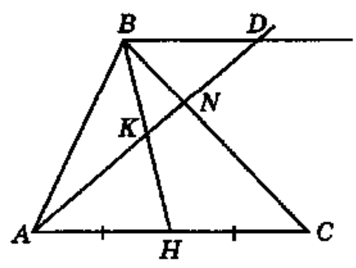
2. Определите вид треугольника, если точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам лежит на одной из сторон треугольника.

1. Прямоугольный; 3. тупоугольный;
2. остроугольный; 4. определить невозможно.

3. Углы треугольника относятся, как 3 : 12 : 5. Определите, как расположен центр описанной около этого треугольника окружности.

1. Внутри треугольника;
2. на одной из сторон треугольника;
3. вне треугольника;
4. определить невозможно.

4. Через вершину B треугольника ABC проведена прямая BD, параллельная AC. Через точку N, лежащую на стороне BC, проведен луч AN, пересекающий эту прямую в точке D, а медиану BH в точке K. Определите, в каком отношении точка K делит медиану BH, если $BN : NC = 1 : 2$.



1. 2 : 3; 3. 2 : 1;
2. 1 : 1; 4. 1 : 2.

5. Пусть P и Q — две фиксированные точки плоскости. Найдите геометрическое место точек M таких, что $\angle PMQ = \angle QPM$.

1. Серединный перпендикуляр к отрезку PQ с «выколотой» точкой пересечения серединного перпендикуляра с отрезком PQM;

2. биссектриса угла с вершиной в точке PQ с «выколотой» точкой Q;

3. окружность радиуса PQ с центром в точке P с «выколотыми» точкой Q и симметричной ей точкой Q_1;

4. окружность радиуса PQ с центром в точке Q с «выколотыми» точкой P и симметричной ей точкой P_1.

Часть 2

6. Периметр описанного четырехугольника $ABCD$ равен 34 см. Найдите сторону AB, если она на 3 см больше стороны CD.

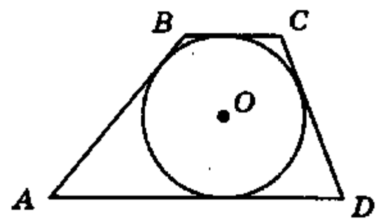
____

7. В параллелограмм, диагонали которого не равны, вписана окружность. Определите вид этого параллелограмма.

____

8. В трапецию вписана окружность. Найдите периметр этой трапеции, если ее основания равны 8 см и 12 см.

____

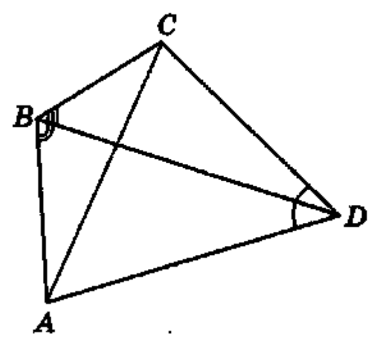


9. Диагональ AC ромба $ABCD$ равна 24 см. Середина стороны AB — точка K — соединена с вершиной D и пересекает диагональ AC в точке M. Найдите длину отрезка MC.

____

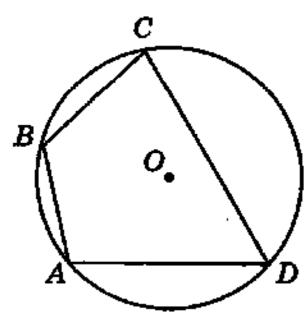
10. В четырехугольнике $ABCD$ угол CBD равен $50°$, угол ADC равен $60°$ и угол ABD равен $70°$. Найдите угол CAD.

____

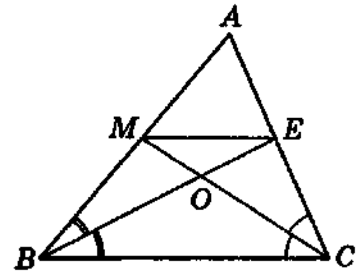


11. Найдите угол BAD четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность, если внешний угол четырехугольника при вершине C равен $108°$.

____



12. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BE и CM. Найдите угол BEM, если угол BAC равен $60°$.



Часть 3

13. На стороне AB параллелограмма $ABCD$ как на диаметре построена окружность, проходящая через точку пересечения диагоналей и середину стороны AD. Найдите острый угол параллелограмма.

14. Даны отрезки, равные a, b, c, d и e. Постройте отрезок $\frac{abc}{de}$.

15. Биссектриса CD внешнего угла треугольника ABC при вершине C пересекает продолжение стороны AB в точке D. Докажите, что $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CB}$.

Вариант 2

Часть 1

1. Даны три прямые k, l и m. Прямые k и l пересекаются в точке A, прямые l и m пересекаются в точке B, а прямые k и m — в точке C. Определите, сколько существует окружностей, одновременно касающихся каждой из трех прямых k, l и m.

1. Ни одной; 2. одна; 2. три; 4. четыре.

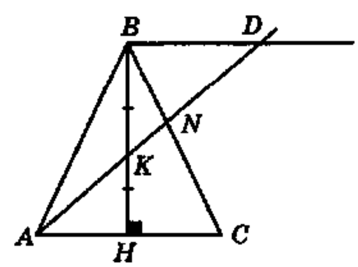
2. Определите вид треугольника, если точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам лежит вне треугольника.

1. Прямоугольный; 3. тупоугольный;
2 остроугольный; 4. определить невозможно.

3. Углы треугольника относятся, как 3 : 4 : 5. Определите, как расположен центр окружности, описанной около этого треугольника.

1. Внутри треугольника;
2. на одной из сторон треугольника;
3. вне треугольника;
4. определить невозможно.

4. Через вершину B равнобедренного треугольника ABC проведена прямая AD, параллельная основанию AC. Через точку K – середину высоты BH — проведен луч AK, пересекающий эту прямую в точке D, а сторону BC в точке N. В каком отношении точка N делит сторону BC?



1. 2 : 3; 3. 1 : 1;
2. 1 : 2; 4. 2 : 1.

5. Пусть P и Q — две фиксированные точки плоскости. Найдите геометрическое место точек M таких, что $\angle PMQ = \angle MQP$.

1. Серединный перпендикуляр к отрезку PQ с «выколотой» точкой пересечения серединного перпендикуляра с отрезком PQM;
2. биссектриса угла с вершиной в точке PQ с «выколотой» точкой Q;
3. окружность радиуса PQ с центром в точке P с «выколотыми» точкой Q и симметричной ей точкой Q_1;
4. окружность радиуса PQ с центром в точке Q с «выколотыми» точкой P и симметричной ей точкой P_1.

Часть 2

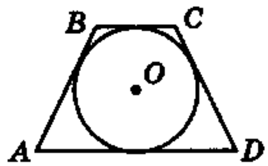
6. Периметр описанного четырехугольника $ABCD$ равен 32 см. Найдите сторону AB, если она в три раза больше стороны CD.

____

7. Около параллелограмма, диагонали которого не перпендикулярны, описана окружность. Определите вид этого параллелограмма.

____

8. В равнобочную трапецию $ABCD$ вписана окружность. Найдите периметр этой трапеции, если ее боковая сторона CD равна 11 см.

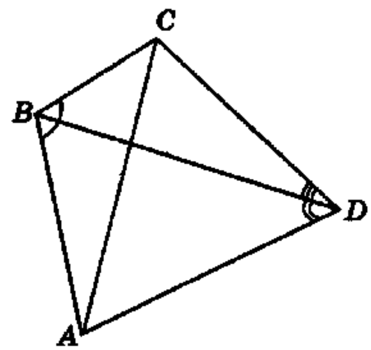


____

9. Диагональ BD прямоугольника $ABCD$ равна 24 см. Середина стороны AB — точка K — соединена с вершиной D и пересекает диагональ AC в точке M. Найдите длину отрезка AM.

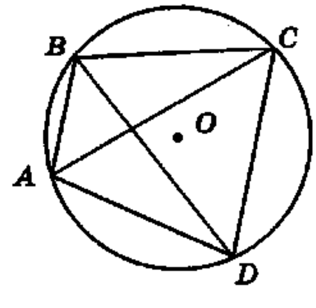
____

10. В четырехугольнике $ABCD$ угол ABC равен $110°$, угол ADC равен $70°$ и угол BDC равен $25°$. Найдите угол ACB.



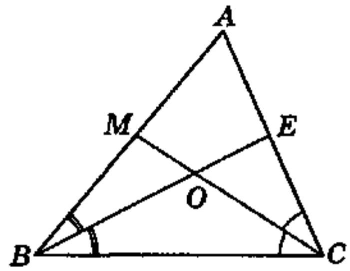
____

11. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ угол ABD равен $50°$, а угол CDA равен $75°$. Найдите угол CAD.



____

12. В треугольнике ABC проведены биссектрисы углов BCA и ABC, которые пересекают стороны треугольника в точках M и E соответственно. Точка O — точка пересечения биссектрис. Найдите угол BAC, если точки A, M, O и E лежат на одной окружности.



____

Часть 3

13. Окружность, построенная на основании AD трапеции $ABCD$ как на диаметре, проходит через середины боковых сторон AB и CD трапеции и касается основания BC. Найдите больший угол трапеции.

14. Даны отрезки, равные a и b. Постройте отрезок x, если $\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

15. Прямая FD, проведенная через вершину C треугольника, пересекает продолжение противолежащей стороны AB в точке D. Докажите, что если при этом выполняется отношение $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CB}$, то луч CD является биссектрисой внешнего угла BCE треугольника ABC.

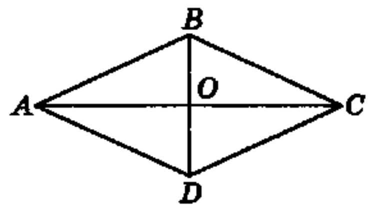
Учебник «Геометрия. 7–9» Л.С. Атанасяна и др.

ТЕСТ 1

Вариант 1

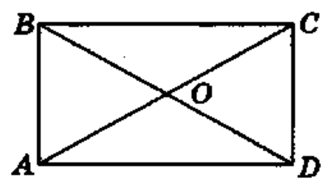
Часть 1

1. **Ответ:** 3.



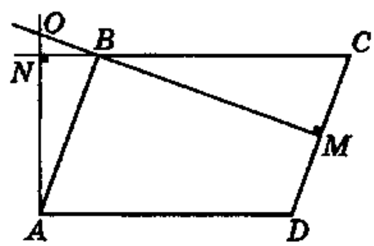
Решение. Пусть в ромбе $ABCD$ угол ABC равен β и угол DAB равен α. Треугольник ABO — прямоугольный по свойству диагоналей ромба, при этом $\angle ABO = \frac{\beta}{2}$, а $\angle BAO = \frac{\alpha}{2}$. По условию $AC > BD$, значит, $\angle ABO > \angle BAO$, так как в треугольнике против большей стороны лежит больший угол, т. е. $\frac{\beta}{2} > \frac{\alpha}{2}$. По свойству углов параллелограмма $\alpha + \beta = 180°$ (*сумма углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, равна* 180°), а это значит, что один из углов острый, а другой — тупой, из соотношения $\frac{\beta}{2} > \frac{\alpha}{2}$ следует, что $\beta > \alpha$. Значит, угол ABC, равный β, тупой. Следовательно, треугольник ABC — тупоугольный.

2. **Ответ:** 3.



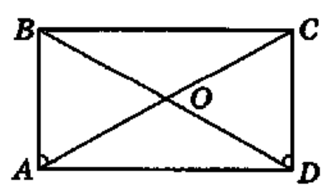
Решение. По свойству диагоналей прямоугольника $AC = BD$, значит, $AO = OD$. Следовательно, треугольник AOD — равнобедренный.

3. **Ответ:** 2.



Решение. Треугольники NOB и MCB — прямоугольные, так как по условию $BM \perp CD$ и $AN \perp BC$ и у них $\angle NBO = \angle MBC$ как вертикальные, следовательно, по теореме о сумме углов треугольника $\angle NOB = \angle MCB$. Отсюда, прямые BM и AN пересекаются, но не перпендикулярны.

4. **Ответ:** 1.

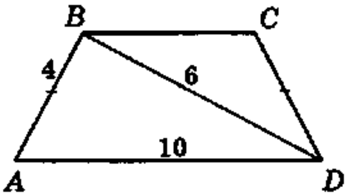


Решение. Так как $ABCD$ — параллелограмм, то углы ABD и CDB равны как накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD и секущей BD, а углы BAC и CDB равны по условию, следовательно, углы ABD и BAC равны. Значит, треугольник ABO — равнобедренный и $AO = BO$, отсюда, диагонали AC и CB равны, следовательно, параллелограмм $ABCD$ — прямоугольник, а так как AB и AD равны, то — квадрат.

5. О т в е т: 4.

<u>Анализируем условие задачи:</u>

Предположим, трапеция $ABCD$ — искомая. Тогда, если основание $AD = 10$ см, диагональ $DB = 6$ см, а сторона $AB = 4$ см, то в треугольнике ABD сторона AD равна сумме сторон AB и DB. Так как стороны треугольника ABD не удовлетворяют неравенству треугольника, то такой треугольник не существует. Следовательно, построить трапецию по данным условия задачи нельзя, т. е. решения нет.



Часть 2

6. О т в е т: 11.

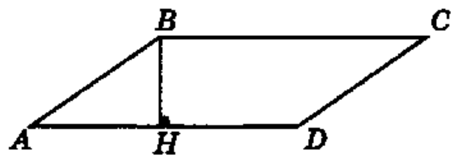
<u>Решение</u>. По формуле суммы всех углов выпуклого многоугольника $(n-2)180° = 1620°$. Отсюда $n = 11$.

7. О т в е т: 15.

<u>Решение</u>. Сумма всех углов выпуклого многоугольника равна $(n-2)180°$. Внешний и внутренний углы многоугольника при одной вершине являются смежными углами и в сумме равны $180°$. Поэтому сумма внешних углов выпуклого многоугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна $n180° - (n-2)180° = 360°$. Следовательно, данный многоугольник имеет $360 : 24 = 15$ вершин.

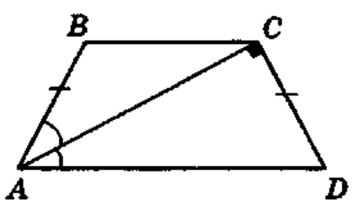
8. Ответ: 150.

<u>Решение</u>. Треугольник ABH — прямоугольный, по условию BH — высота параллелограмма $ABCD$. Катет BH в два раза меньше гипотенузы AB (по свойству параллелограмма $AB = CD$), значит, угол, противолежащий катету BH, равен $30°$. В параллелограмме сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна $180°$, значит, $\angle ABC = 150°$.



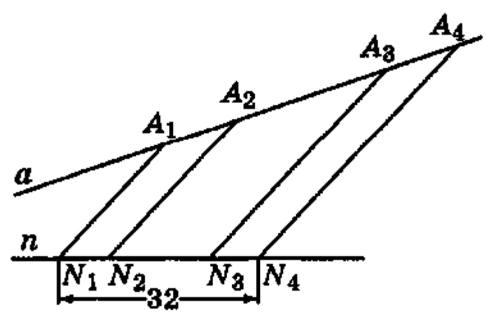
9. О т в е т: 60.

<u>Решение</u>. В равнобокой трапеции углы при основании равны. Следовательно, $\angle A = \angle D$. Так как диагональ AC перпендикулярна CD и является биссектрисой угла A, то в прямоугольном треугольнике ACD: $\frac{1}{2}\angle A + \angle D = 90°$, отсюда $\angle ADC = 60°$ и $\angle DAB = \angle ADC = 60°$.



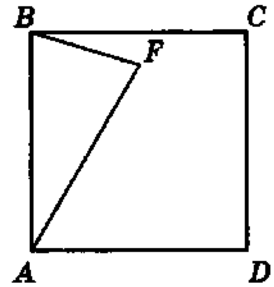
10. О т в е т: 24.

<u>Решение</u>. Из теоремы Фалеса следует, что если параллельные прямые A_1N_1, A_2N_2, A_3N_3 и A_4N_4 пересекают прямые a и n и при этом $A_1A_2 : A_2A_3 : A_3A_4 = 1 : 2 : 1$, то $N_1N_2 : N_2N_3 : N_3N_4 = 1 : 2 : 1$. Отрезок N_1N_4 разделен на четыре равные части, значит, одна часть равна 8 см. Отсюда N_1N_3 равен трем частям $N_1N_3 = 24$ см.



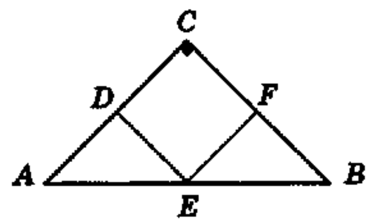
11. Ответ: 1.

Решение. Рассмотрим треугольник BAF: $\angle BAD = 90°$, поскольку $ABCD$ — квадрат, значит, $\angle BAF = 30°$, а по теореме о сумме углов треугольника $\angle ABF = 180° - 75° - 30° = 75°$, следовательно, треугольник BAF — равнобедренный, $AF = AB = 1$ см.



12. Ответ: 9.

Решение. Углы DEA и CBA равны как соответственные при параллельных прямых DE и BC и секущей AB. Треугольник ABC — равнобедренный, значит, $\angle CBA = \angle CAB$, т.е. $\angle DEA = \angle CAB = \angle DAE$. Следовательно, треугольник ADE — равнобедренный, откуда $AD = ED$. Аналогично доказывается, что $EF = FB$. Поэтому $P_{BDEF} = CD + DE + EF + FC = CD + AD + FC + FB = AC + BC$. Треугольник ABC — равнобедренный, значит, $AC = BC$. Отсюда $AC = BC = 9$ см.



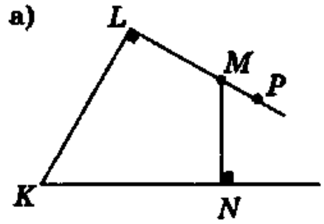
Часть 3

13. Ответ: 36.

Решение. Сначала докажем, что "углы с взаимно перпендикулярными сторонами либо равны, либо дополняют друг друга до 180°" (рис. а).

Внутри угла LKN отметим точку M и опустим из нее перпендикуляры ML и MN к сторонам угла соответственно. Точка M отмечена внутри угла LKN, значит, она лежит с лучом KL в одной полуплоскости относительно прямой KN. Поэтому отрезки KL, LM и MN лежат в одной полуплоскости относительно прямой KN. Аналогично доказывается, что отрезки KL, LM и MN лежат в одной полуплоскости относительно прямой KL. Следовательно, четырехугольник $KLMN$ — выпуклый.

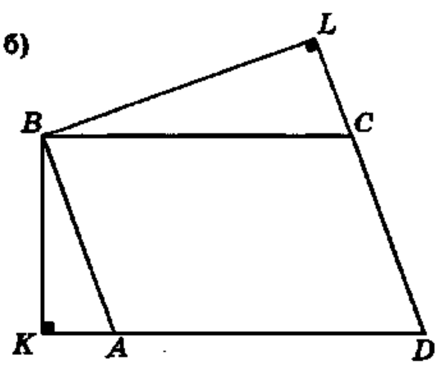
а)



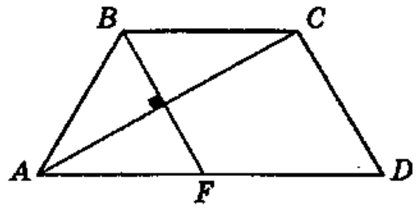
Сумма углов выпуклого четырехугольника равна 360°, каждый из углов KLM и KNM равен 90°, так как ML и MN — перпендикулярны сторонам угла. Значит, углы LKN и LMN дополняют друг друга до 180°, а углы LKN и NMP равны.

Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ (рис. б). Углы LBK и ADC со взаимно перпендикулярными сторонами, значит, $\angle ADC$ дополняет $\angle LBK$ до 180°. По свойству углов параллелограмма $\angle ABC = \angle ADC$. Значит, $\angle LBK = 4\angle ABC$, $\angle ABC + \angle LBK = \angle ABC + 4\angle ABC = 180°$, $\angle ABC = 36°$.

б)



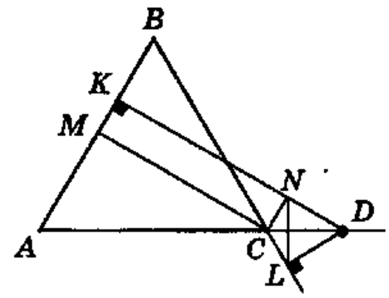
14. Ответ: 120.



Решение. Трапеция $ABCD$ — равнобедренная, по условию стороны AB и CD равны. Так как отрезок BF — биссектриса тупого угла ABC перпендикулярна диагонали AC, то треугольник ABC — равнобедренный. Отсюда $AB = BC = CD$.

Следовательно, параллелограмм $BCDF$ — ромб, значит, $CD = BF$ и $\angle CDF = \angle FBC$. Углы AFB и FBC равны как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей BF. Отсюда $AB = AF$, $AB = CD = BF$, значит, треугольник ABF — равносторонний и $\angle FBC = \angle AFB = 60°$. Следовательно, $\angle CDF = \angle FBC = 60°$, отсюда $\angle BCD = 120°$.

15. Ответ: 4.



Решение. Опустим перпендикуляры DK и DL из точки D на стороны AB и BC соответственно. Через точку L проведем прямую, перпендикулярную прямой AC до пересечения с прямой DK в точке N. Углы LND и NLD треугольника LND соответственно равны углам BAC и BCA как углы со взаимно перпендикулярными сторонами. По условию ΔABC — равнобедренный с основанием AC, значит, $\angle BAC = \angle BCA$, следовательно, и углы LND и NLD треугольника LND равны. В силу признака равнобедренного треугольника ΔLND — равнобедренный с основанием LN, значит, стороны ND и LD равны. Отрезок DK равен сумме отрезков KN и ND: $DK = KN + ND = KN + LD$, отсюда $KN = DK - LD$, т. е. отрезок KN является разностью расстояний от точки D до сторон AB и BC и равен 4 см.

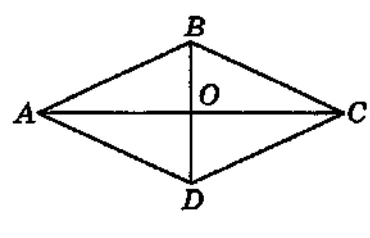
Треугольники CND и CLD равны по двум сторонам и углу между ними, так как $ND = LD$ по доказанному, сторона CD — общая. Прямая CD является биссектрисой угла NDL, так как по построению $NL \perp CD$, т. е. является высотой равнобедренного треугольника LND, а по свойству высоты равнобедренного треугольника NL является и биссектрисой, значит, $\angle CND = \angle CLD$. Отсюда $\angle CND = \angle CLD = 90°$.

Проведем из вершины C высоту CM. Рассмотрим четырехугольник $MKNC$. Прямые CM и KN перпендикулярны к одной прямой KM, следовательно, параллельны, прямые KM и CN перпендикулярны к одной прямой KN, значит, четырехугольник $MKNC$ — прямоугольник. Отсюда $CM = KN = 4$ см.

Вариант 2

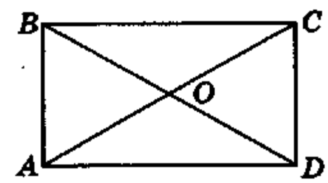
Часть 1

1. Ответ: 1.



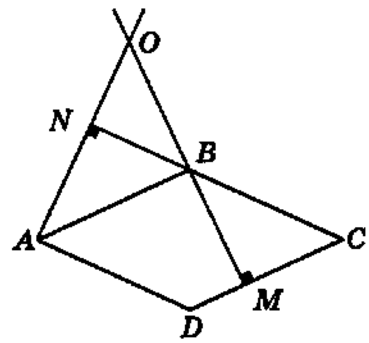
Решение. Так как по условию диагональ BD равна стороне ромба, а по определению у ромба все стороны равны, то треугольник ABD — равносторонний. У равностороннего треугольника все углы равны $60°$, т.е. острые. Следовательно, треугольник ABD — остроугольный.

2. Ответ: 2.



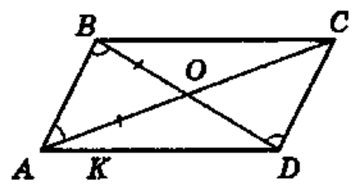
Решение. По свойству диагоналей прямоугольника $AC = BD$, значит, $AO = OB$. Следовательно, треугольник AOB — равнобедренный. Углы AOB и AOD — смежные, значит, по теореме о смежных углах $\angle AOB = 180° - \angle AOD = 60°$. По свойству равнобедренного треугольника $\angle OAB = \angle OBA$, а из теоремы о сумме углов треугольника следует $\angle OAB = \angle OBA = \angle BOA$. Так как в треугольнике против равных сторон лежат равные углы, то треугольник AOB — равносторонний.

3. О т в е т: 2.



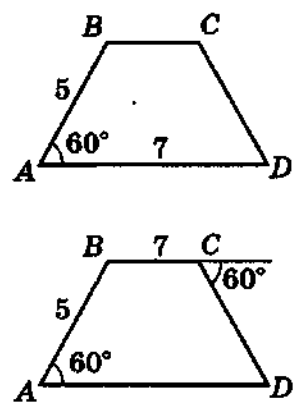
Решение. Треугольники NOB и MCB — прямоугольные, так как по условию $BM \perp CD$ и $AN \perp BC$ и у них $\angle NBO = \angle MBC$, как вертикальные, следовательно, по теореме о сумме углов треугольника $\angle NOB = \angle MCB$. Отсюда прямые BM и AN пересекаются, но не перпендикулярны.

4. О т в е т: 3.



Решение. В параллелограмме $ABCD$ $\angle CDB = \angle CAB$, по условию $\angle CDB = \angle DBA$ как накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD и секущей BD. Отсюда $\angle CAB = \angle DBA$, следовательно, в треугольнике AOB: $BO = AO$. Значит, в параллелограмме $ABCD$ диагонали AC и DB равны. Следовательно, параллелограмм $ABCD$ является прямоугольником. А так как соседние стороны AB и AD равны, это квадрат.

5. О т в е т: 2.



Анализируем условие задачи:

Так как в условии задачи не указано, какое из оснований дано: большее или меньшее, то возможны два варианта.

Первый. Большее основание AD равно 7 см. Построим угол BAD, равный 60°, на его сторонах отложим основание трапеции $AD = 7$ см и сторону $AB = 4$ см, затем достраиваем до трапеции.

Второй. Меньшее основание равно 7 см. Построим угол BAD, равный 60°, на его стороне отложим сторону $AB = 4$ см, затем построим прямую BC, параллельную AD и проходящую через точку B. На прямой BC отложим основание трапеции $BC = 7$ см и достраиваем до трапеции.

Часть 2

6. О т в е т: 24.

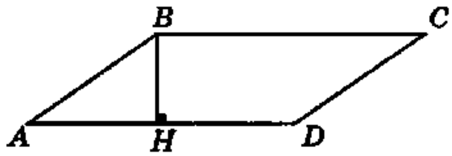
Решение. Из формулы суммы всех углов выпуклого многоугольника следует

$$165° = \frac{(n-2)180°}{n}, \text{ отсюда } n = 24.$$

7. О т в е т: 168.

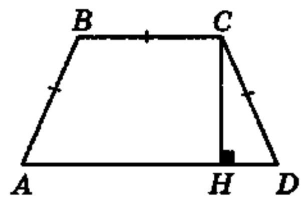
<u>Решение</u>. Сумма всех углов выпуклого многоугольника равна $(n-2)180°$. Внешний и внутренний углы многоугольника при одной вершине являются смежными углами и в сумме равны $180°$. Поэтому сумма внешних углов выпуклого многоугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна $n180° - (n-2)180° = 360°$. Так как все внутренние углы выпуклого 30-угольника равны, то и все его внешние углы равны. Градусная мера внешнего угла равна $12°$. Следовательно, градусная мера внутреннего угла равна $168°$.

8. О т в е т: 135.



<u>Решение</u>. Треугольник ABH — прямоугольный, по условию BH — высота параллелограмма $ABCD$, и равнобедренный. Из теоремы о сумме углов треугольника следует, что острый угол прямоугольного равнобедренного треугольника равен $45°$. В параллелограмме сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна $180°$, значит, $\angle ADC = 135°$.

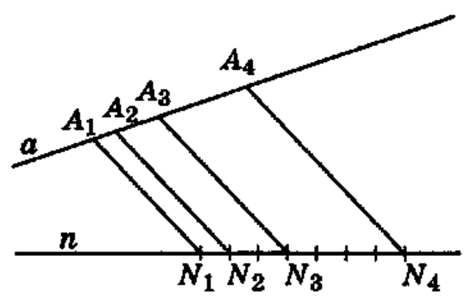
9. О т в е т: 60.



<u>Решение</u>. Проведем высоту CH и рассмотрим треугольник CHD — прямоугольный, поскольку отрезок CH — высота. Так как AD в два раза больше основания BC, то $HD = \frac{1}{2}BC$, а поскольку $BC = CD$, то $HD = \frac{1}{2}CD$.

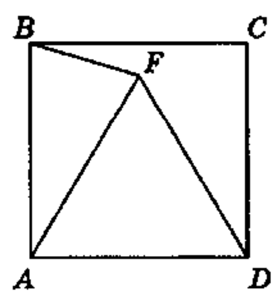
Значит, в прямоугольном треугольнике CHD катет HD равен половине гипотенузы CD. Следовательно, $\angle HCD = 30°$, а $\angle CDA = 60°$.

10. О т в е т: 28.



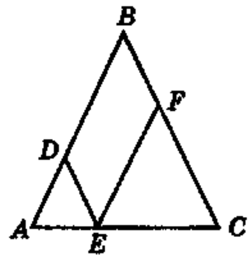
<u>Решение</u>. Из теоремы Фалеса следует, что если параллельные прямые A_1N_1, A_2N_2, A_3N_3 и A_4N_4 пересекают прямые a и n и при этом $N_1N_2 : N_2N_3 : N_3N_4 = 1 : 2 : 4$, то $A_1A_2 : A_2A_3 : A_3A_4 = 1 : 2 : 4$. Отсюда $A_1A_2 : A_3A_4 = 1 : 4$. Следовательно, $A_3A_4 = 28$ см.

11. О т в е т: 15.



<u>Решение</u>. Так как треугольник AFD равносторонний, то $AF = AD$, а так как четырехугольник $ABCD$ — квадрат, то $AD = AB$, т. е. $AF = AD = AB$, следовательно, треугольник BAF — равнобедренный, значит, $\angle ABF = \angle AFB$, $\angle BAF = \angle BAD - \angle FAD = 90° - 60° = 30°$. По теореме о сумме углов треугольника $2\angle ABF = 180° - 30° = 150°$, $\angle ABF = 75°$. Следовательно, $\angle FBC = \angle ABC - \angle FBC = 90° - 75° = 15°$.

12. О т в е т: 8.

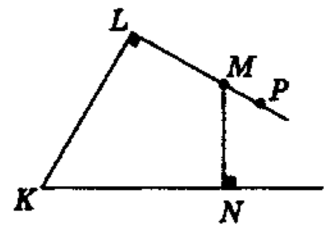


Решение. Углы DEA и BCA равны как соответственные при параллельных прямых DE и BC и секущей AC. Треугольник ABC — равнобедренный, значит, $\angle BCA = \angle BAC$, т.е. $\angle DEA = \angle BAC = \angle DAE$. Следовательно, треугольник ADE — равнобедренный, откуда $AD = ED$. Аналогично доказывается, что $EF = FC$. Поэтому $P_{BDEF} = BD + DE + EF + BF = BD + AD + FC + FB = AB + BC$. Треугольник ABC — равнобедренный, значит, $AB = BC$. Отсюда $AB = BC = 8$ см.

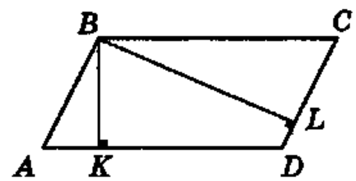
Часть 3

13. О т в е т: 45.

а)



б)



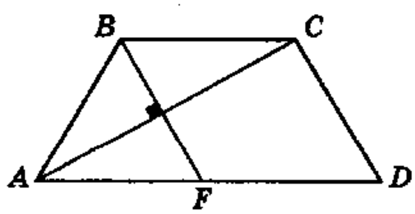
Решение. Сначала докажем, что углы с взаимно перпендикулярными сторонами либо равны, либо дополняют друг друга до 180° (рис. а).

Внутри угла LKN отметим точку M и опустим из нее перпендикуляры ML и MN к сторонам угла соответственно. Точка M отмечена внутри угла LKN, значит, она лежит с лучом KL в одной полуплоскости относительно прямой KN. Поэтому отрезки KL, LM и MN лежат в одной полуплоскости относительно прямой KN. Аналогично доказывается, что отрезки KL, LM и MN лежат в одной полуплоскости относительно прямой KL. Следовательно, четырехугольник $KLMN$ — выпуклый.

Сумма углов выпуклого четырехугольника равна 360°, углы KLM и KNM равны 90°, так как ML и MN перпендикулярны сторонам угла. Значит, углы LKN и LMN дополняют друг друга до 180°, а углы LKN и NMP равны.

Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ (рис. б). Углы LBK и ADC со взаимно перпендикулярными сторонами, значит, $\angle ADC$ дополняет $\angle LBK$ до 180°. По свойству углов параллелограмма $\angle ABC = \angle ADC$. Значит, $\angle ABC = 3\angle LBK$, $\angle ABC + \angle LBK = 3\angle LBK + \angle LBK = 180°$, $\angle LBK = 45°$. Отсюда $\angle ABC = 135°$, а $\angle BAC = 45°$ как прилегающие к одной стороне параллелограмма.

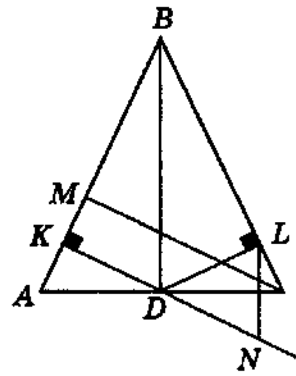
14. О т в е т: 6.



Решение. Трапеция $ABCD$ — равнобедренная, по условию стороны AB и CD равны. Так как отрезок BF — биссектриса тупого угла ABC перпендикулярна диагонали AC, то треугольник ABC — равнобедренный. Отсюда $AB = BC = CD$.

Следовательно, параллелограмм $BCDF$ — ромб, значит, $CD = BF$ и $\angle CDF = \angle FBC$. Углы AFB и FBC равны как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей BF. Отсюда $AB = AF$, $AB = CD = BF$, значит, треугольник ABF — равносторонний и $AD = 2BC$. Следовательно, $P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD = 3BC + 2BC = 5BC = 30$ см, $BC = 6$ см.

15. Ответ: 12.



Решение. Опустим перпендикуляры DK и DL из точки D на стороны AB и BC соответственно. Через точку L проведем прямую, перпендикулярную прямой AC до пересечения с прямой DK в точке N. Углы LND и NLD треугольника LND соответственно равны углам BAC и BCA как углы с взаимно перпендикулярными сторонами. По условию ΔABC — равнобедренный с основанием AC, значит, $\angle BAC = \angle BCA$, следовательно, и углы LND и NLD треугольника LND равны. В силу признака равнобедренного треугольника ΔLND равнобедренный с основанием LN, значит, стороны ND и LD равны. Отрезок KN равен сумме отрезков DK и DN: $KN = DK + DN = DK + DL$, т. е. отрезок KN является суммой расстояний от точки D до сторон AB и BC и равен 12 см.

Треугольники CND и CLD равны по двум сторонам и углу между ними, так как $ND = LD$ по доказанному, сторона CD — общая. Прямая CD является биссектрисой угла NDL, так как по построению $NL \perp CD$, т. е. является высотой равнобедренного треугольника LND, а по свойству высоты равнобедренного треугольника NL является и биссектрисой, значит, $\angle CND = \angle CLD$. Отсюда $\angle CND = \angle CLD = 90°$.

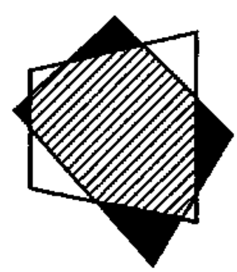
Проведем из вершины C высоту CM. Рассмотрим четырехугольник $MKNC$. Прямые CM и KN перпендикулярны к одной прямой KM, следовательно, параллельны, прямые KM и CN перпендикулярны к одной прямой KN, значит, четырехугольник $MKNC$ — прямоугольник. Отсюда $CM = KN = 12$ см.

ТЕСТ 2

Вариант 1

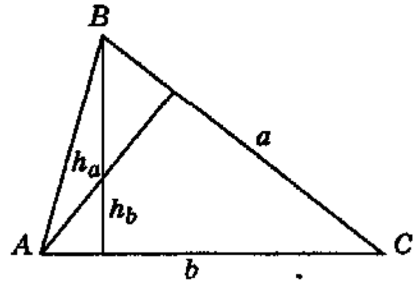
Часть 1

1. Ответ: 2.



Решение. По основному свойству площади каждый из двух равновеликих четырехугольников состоит из общей части, отмеченной "штриховкой", и для одного из них четырех белых треугольников, а для другого четырех черных треугольников. Сумма площадей белых треугольников равна разности всей площади четырехугольника и общей части и равна S_2. Аналогично, сумма площадей черных треугольников равна разности всей площади четырехугольника и общей части и равна S_1. Как S_1, так и S_2 равна разности равных площадей, т. е. $S_1 = S_2$.

2. Ответ: 3.



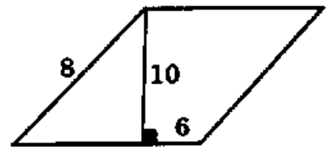
Решение. Площадь треугольника $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b$, отсюда, если $a > b$, то $h_a < h_b$.

3. О т в е т: 4.

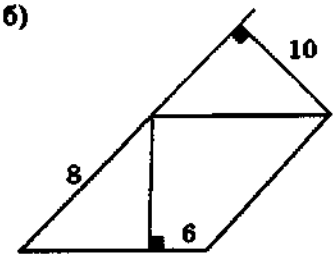
Анализируем условие задачи:

В прямоугольном треугольнике наибольшим является прямой угол, значит, гипотенуза больше катета. Если провести высоту к стороне, равной 6 см, то получим прямоугольный треугольник, у которого катет равен 10 см, а гипотенуза 8 см (рис. а). Такой треугольник не существуют. Если провести высоту к стороне, равной 8 см, то получим прямоугольный треугольник, у которого катет равен 10 см, а гипотенуза 6 см (рис. б). Такой треугольник не существуют. Следовательно, задача не имеет решения.

а)

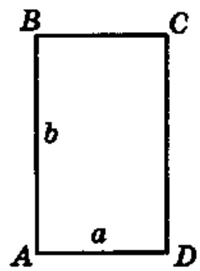


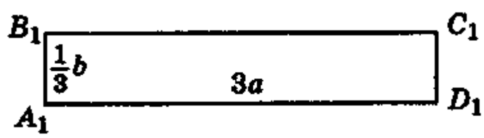
б)



4. О т в е т: 4.

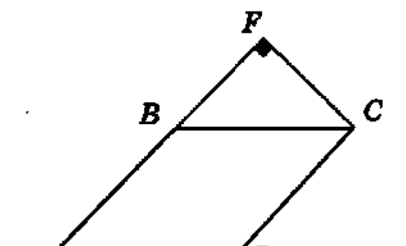
Решение. Площадь прямоугольника $ABCD$ равна $S = ab$, а площадь прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$ равна $S_1 = \frac{a}{3} \cdot 3b = ab$. Следовательно, если сторону AB уменьшить в три раза, а сторону AD другую увеличить в три раза, то площадь не изменится.





5. О т в е т: 1.

Решение. Так как у четырехугольника $ABCD$ стороны BC и AD параллельны, то четырехугольник $ABCD$ по определению — трапеция. Треугольник CFB — прямоугольный, так как по условию $CF \perp AB$. Значит, по теореме Пифагора $BC^2 = CF^2 + FB^2 = 15^2 + 8^2 = 289$, $BC = 17$ (см). Таким образом, $BC = 17$ см, а по условию $AD = 17$ см. Следовательно, у четырехугольника $ABCD$ стороны BC и AD равны и параллельны, значит, четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

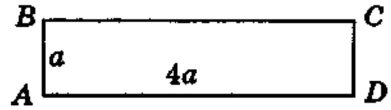


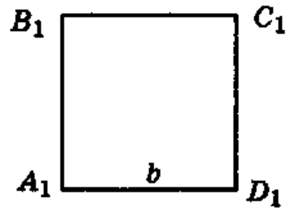
Часть 2

6. О т в е т: 12.

Решение. Прямоугольник $ABCD$ и квадрат $A_1B_1C_1D_1$ равновеликие. Площадь квадрата $A_1B_1C_1D_1$ $S = b^2 = 36$ см^2, значит, и площадь прямоугольника $ABCD$ равна 36 см^2. По условию стороны прямоугольника $ABCD$ относятся как $1 : 4$, значит, его площадь равна

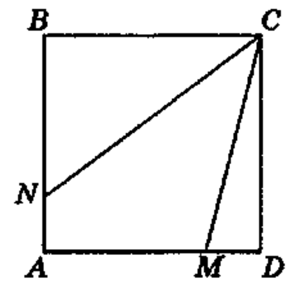
$S = 4a \cdot a$. Отсюда $36 = 4a^2$; $a = 3$ (см). Следовательно, большая сторона прямоугольника равна 12 см.





7. О т в е т: 0,5.

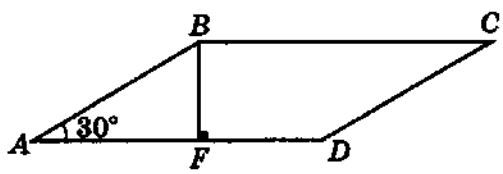
<u>Решение.</u> Площадь квадрата $ABCD$ равна сумме площади треугольника NBC, площади треугольника MCD и площади четырехугольника $ANCM$ $S_{ABCD} = S_{NBC} + S_{MCD} + S_{ANCM}$. Следовательно, площадь четырехугольника $ANCM$ равна $S_{ANCM} = S_{ABCD} - S_{NBC} - S_{MCD}$. По условию на стороне AB квадрата $ABCD$ отложен отрезок $AN = \frac{1}{4}AB$, значит, отрезок $BN = \frac{3}{4}AB$. Так как площадь квадрата $ABCD$ равна 1 см^2, то сторона квадрат равна 1 см. Отсюда следует, что площадь треугольника NBC $S_{NBC} = \frac{1}{2}NB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{3}{8}$ (см^2).



По условию на стороне AD квадрата $ABCD$ отложен отрезок $AM = \frac{3}{4}AD$, значит, отрезок $MD = \frac{1}{4}AD$. Отсюда следует, что площадь треугольника MCD $S_{MCD} = \frac{1}{2}MD \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{8}$ (см^2). Значит, $S_{ANCM} = S_{ABCD} - S_{NBC} - S_{MCD} = 1 - \frac{1}{8} - \frac{3}{8} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ (см^2).

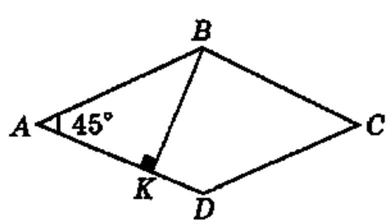
8. О т в е т: 44.

<u>Решение.</u> По условию стороны AB и AD параллелограмма $ABCD$ соответственно равны 8 см и 11 см. Проведем высоту BF в прямоугольном треугольнике ABF, $\angle BAF = 30°$. По свойству прямоугольного треугольника, один угол которого равен 30°, катет BF равен 4 см. Значит, площадь параллелограмма $ABCD$ равна $S_{ABCD} = AD \cdot BF = 11 \cdot 4 = 44$ (см^2).

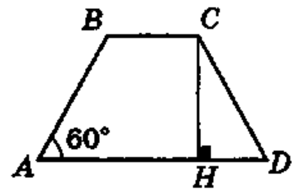


9. О т в е т: $50\sqrt{2}$.

<u>Решение.</u> По условию отрезок BK — высота ромба $ABCD$, значит, треугольник ABK — прямоугольный, у которого $\angle BAD = 45°$, значит, прямоугольный треугольник ABK — равнобедренный, $BK = AK$. Сторона AB ромба $ABCD$ является гипотенузой прямоугольного равнобедренного треугольника ABK. По теореме Пифагора $AB^2 = BK^2 + AK^2 = 2 \cdot (5\sqrt{2})^2$, $AB = 10$ (см). Так как в ромбе все стороны равны, то $AB = AD = 10$ см. Площадь ромба $ABCD$ равна $S_{ABCD} = AD \cdot BK = 10 \cdot 5\sqrt{2} = 50\sqrt{2}$ (см^2).



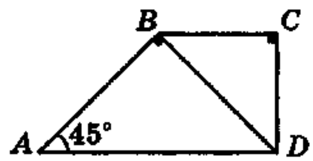
10. Ответ: $55\sqrt{3}$.



Решение. Проведем из вершины B равнобедренной трапеции $ABCD$ высоту BH, значит, треугольник ABK — прямоугольный, у которого $\angle BAD = 60°$. Тогда по свойству прямоугольного треугольника, один угол которого равен $30°$, катет AH прямоугольного треугольника ABH равен 5 см. По теореме Пифагора катет $BH^2 = AB^2 - AH^2 = \sqrt{10^2 - 5^2}$, $BH = 5\sqrt{3}$ (см).

По условию $P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD = 42$ см и $AB = CD = 10$ см, значит, $BC + AD = 22$ см. Площадь трапеции $ABCD$ равна $S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot BH = 11 \cdot 5\sqrt{3} = 55\sqrt{3}$ (см^2).

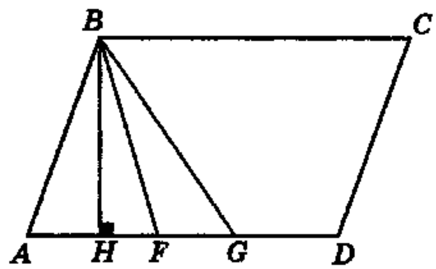
11. Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Решение. По условию треугольник ABD — прямоугольный, равнобедренный, значит, $\angle BAD = \angle BDA = 45°$. Так как $CD \perp AD$ и $\angle BDA = 45°$, то $\angle BDC = 45°$. Следовательно, треугольник BCD — прямоугольный, равнобедренный, значит, $BC = CD = a$. Диагональ BD является гипотенузой прямоугольного треугольника ABD и по теореме Пифагора $BD^2 = BC^2 + CD^2 = 2a^2$.

$BD = a\sqrt{2}$. Так как треугольник ABD — прямоугольный, равнобедренный, то $AD^2 = AB^2 + BD^2 = 4a^2$, $AD = 2a$. Следовательно, $BD : AB = a\sqrt{2} : 2a = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

12. Ответ: 8.



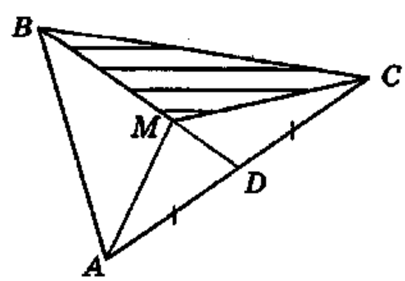
Решение. В параллелограмме $ABCD$ из вершины B к основанию AD проведем высоту BH, которая является и высотой для треугольника FBG, так как основание треугольника FBG лежит на основании параллелограмма $ABCD$.

$S_{FBG} = \frac{1}{2} FG \cdot BH = 2BH$; $S_{ABCD} = AD \cdot BH = 16BH$.

$S_{ABCD} : S_{FBG} = 16BH : 2BH = 8$.

Часть 3

13. Ответ: 28.

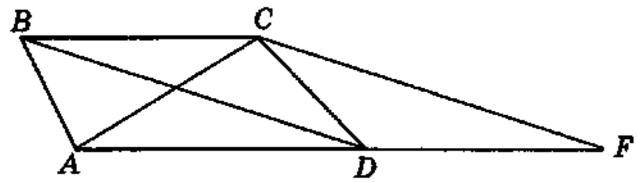


Решение. Вычислим площадь треугольника ABC по формуле Герона: $p = \frac{a + b + c}{2} = 21$ (см);

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 84$ (см^2).

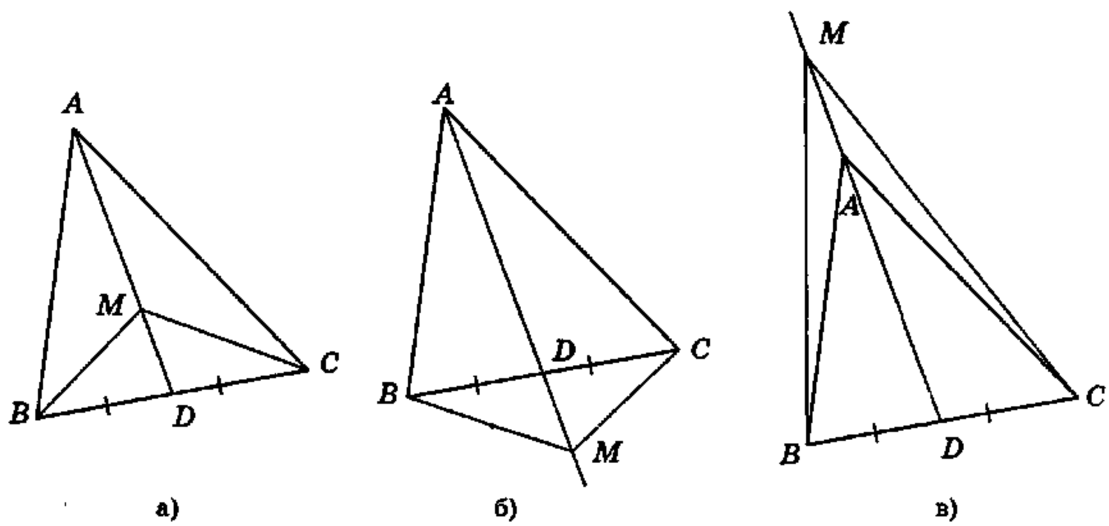
Медиана BD делит треугольник ABC на два равновеликих треугольника ABD и CBD ($AD = CD$, а высота, проведенная из точки B, — общая). Кроме того, так как $BM : MD = 2 : 1$, то $S_{BMC} = 2S_{DMC}$ (эти треугольники имеют общую высоту, проведенную из точки C). Таким образом, $S_{BDC} = \frac{1}{2} S_{ABC} = 42$ (см^2), $S_{BMC} = \frac{2}{3} S_{BDC} = \frac{2}{3} \cdot 42 = 28$ (см^2).

14. Ответ: 24.



Решение. Через вершину C трапеции $ABCD$ проведем прямую CF, параллельную диагонали BD. Тогда четырехугольник $DBCF$ — параллелограмм, так как $BC \| AD$ ($ABCD$ — трапеция), $FC \| BD$ по построению. Следовательно, $FC = BD = 8$ (см); $DF = BC = 3$ (см). Таким образом, длины сторон треугольника ACF равны $FC = 8$ см, $AC = 6$ см и $AF = 10$ см. По теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник ACF — прямоугольный. Значит, $S_{ACF} = \frac{1}{2} AC \cdot FC = 6 \cdot 8 = 24$ (см^2). В треугольниках ABC и CDF основания (DF и BC) и высоты (расстояние между параллельными прямыми) равны, поэтому эти треугольники равновелики. $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD}$, $S_{ACF} = S_{ACD} + S_{CDF}$. Следовательно, $S_{ABCD} = S_{ACF} = 24$ (см^2).

15. Ответ: 24.



Решение. Возможны три варианта расположения точки M.

1. Точка M принадлежит медиане AD (рис. а). Так как отрезок AD — медиана треугольника ABC, то треугольники ABD и ACD равновелики и $BD = CD$.

Значит, MD — медиана треугольника BMC. Следовательно, и треугольники BMD и CMD равновелики. Следовательно, треугольники AMB и AMC равновелики.

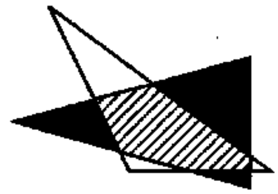
2. Точка M принадлежит продолжению медианы AD за точку D (рис. б). Доказательство аналогично доказательству варианта 1. Площади треугольников AMB и AMC равны соответственно суммам площадей равновеликих треугольников: $S_{AMB} = S_{ABD} + S_{BMD}$ и $S_{AMC} = S_{ACD} + S_{CMD}$.

3. Точка M принадлежит продолжению медианы AD за точку A (рис. в). Доказательство аналогично доказательству варианта 1. Площади треугольников AMB и AMC равны соответственно разностям площадей равновеликих треугольников: $S_{AMB} = S_{BMD} - S_{ABD}$ и $S_{AMC} = S_{CMD} - S_{ACD}$.

Вариант 2

Часть 1

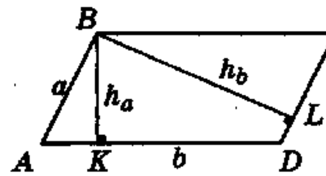
1. Ответ: 2.



Решение. По основному свойству площади каждый из двух равновеликих треугольников состоит из общей части, отмеченной "штриховкой", и для одного из них трех белых треугольников, а для другого трех черных треугольников. Сумма площадей белых треугольников равна разности всей площади треугольника и общей части и равна S_2. Аналогично, сумма площадей черных треугольников равна разности всей площади треугольника и общей части и равна S_1. Как S_1 так и S_2 равна разности равных площадей, т. е. $S_1 = S_2$.

2. Ответ: 2.

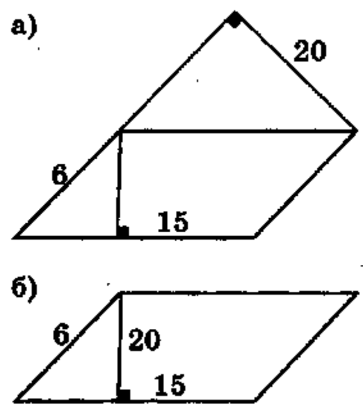
Решение. Площадь параллелограмма $S = ah_a = bh_b$, отсюда, если $a > b$, то $h_a < h_b$.



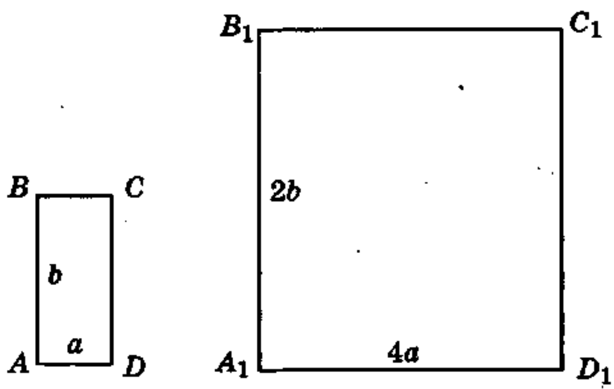
3. Ответ: 4.

Анализируем условие задачи.

В прямоугольном треугольнике наибольшим является прямой угол, значит, гипотенуза больше катета. Если провести высоту к стороне, равной 6 см, то получим прямоугольный треугольник, у которого катет равен 20 см, а гипотенуза 15 см. Такой треугольник не существует. Если провести высоту к стороне, равной 15 см, то получим прямоугольный треугольник, у которого катет равен 20 см, а гипотенуза 6 см. Такой треугольник не существует. Следовательно, задача не имеет решений.



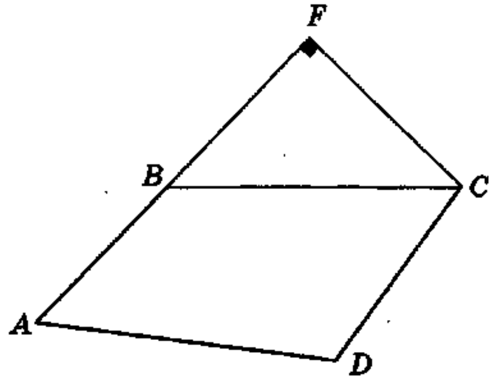
4. Ответ: 1.



Решение. Площадь прямоугольника $ABCD$ равна $S = ab$, а площадь прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$ равна $S_1 = 4a \cdot \frac{b}{2} = 2ab$. Следовательно, если сторону AB уменьшить в два раза, а сторону AD увеличить в четыре раза, то площадь увеличится в два раза.

5. Ответ: 3.

Решение. Так как у четырехугольника $ABCD$ стороны AB и CD параллельны, то это может быть либо параллелограмм, либо трапеция. Треугольник CFB — прямоугольный, так как по условию $CF \perp AB$. Значит, по теореме Пифагора $BC^2 = CF^2 + BF^2 = 12^2 + 5^2 = 169$, $BC = 13$ (см). По условию, сторона AD равна 15 см, следовательно, у четырехугольника $ABCD$ стороны BC и AD не равны. Значит, четырехугольник $ABCD$ — трапеция, отличная от равнобедренной.

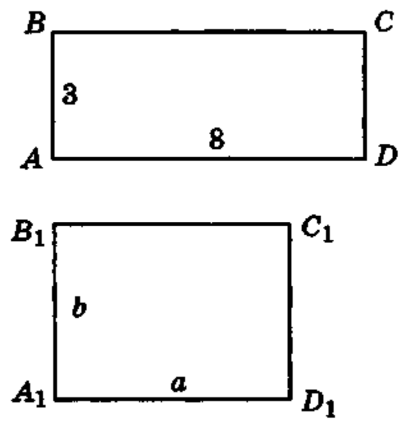


Часть 2

6. Ответ: 4.

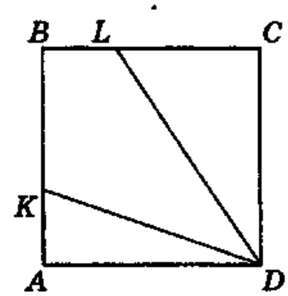
Решение. Прямоугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ равновеликие. Площадь прямоугольника $ABCD$ $S_{ABCD} = 3 \cdot 8 = 24$ (см^2), значит, и площадь прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$ равна 24 см^2. По условию периметр прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$ равен 20 см. Значит, $a + b = 10$, а его площадь равна $S_{A_1B_1C_1D_1} = ab = 24$. Отсюда $\begin{cases} a + b = 10, \\ ab = 24; \end{cases}$ $a = 10 - b$; $(10 - b)b = 24$; $b^2 - 10b + 24 = 0$. Следовательно, b равно 4 см или 6 см, при этом a равно соответственно 6 см или 4 см.

Значит, меньшая сторона прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$ равна 4 см.



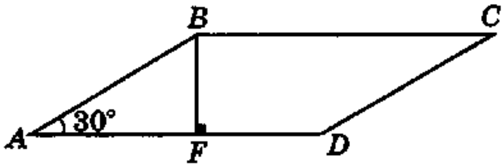
7. Ответ: 0,5.

Решение. Площадь квадрата $ABCD$ равна сумме площади треугольника KAD, площади треугольника LCD и площади четырехугольника $KBLD$ $S_{ABCD} = S_{KAD} + S_{LCD} + S_{KBLD}$. Следовательно, площадь четырехугольника $KBLD$ равна $S_{KBLD} = S_{ABCD} - S_{KAD} - S_{LCD}$. По условию на стороне AB квадрата $ABCD$ отложен отрезок $AK = \frac{1}{3}AB$. Так как площадь квадрата $ABCD$ равна 1 см^2, то сторона квадрата равна 1 см. Отсюда следует, что площадь треугольника KAD $S_{KAD} = \frac{1}{2}KA \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{6}$ (см^2).



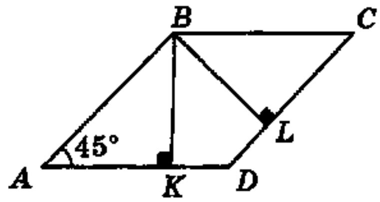
По условию на стороне BC квадрата $ABCD$ отложен отрезок $BL = \frac{1}{3}BC$, значит, отрезок $LC = \frac{2}{3}BC$. Отсюда следует, что площадь треугольника LCD $S_{LCD} = \frac{1}{2}LC \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$ (см^2). Значит $S_{KBLD} = S_{ABCD} - S_{KAD} - S_{LCD} = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ (см^2).

8. О т в е т: 18.



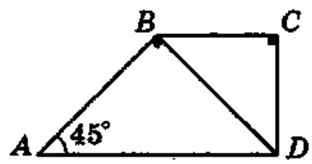
Решение. В ромбе $ABCD$ проведем высоту BF. По условию $\angle ABC = 150°$, значит, $\angle BAD = 30°$. По свойству прямоугольного треугольника, один угол которого равен $30°$, катет BF прямоугольного треугольника ABF равен 3 см. Значит, площадь ромба $ABCD$ равна $S_{ABCD} = AD \cdot BF = 6 \cdot 3 = 18$ (см^2).

9. О т в е т: 30.



Решение. По условию отрезок BK — высота параллелограмма $ABCD$, значит, треугольник ABK — прямоугольный, у которого $\angle BAD = 45°$, и значит, прямоугольный треугольник ABK — равнобедренный, $BK = AK$. Сторона AB параллелограмма $ABCD$ является гипотенузой прямоугольного равнобедренного треугольника ABK. По теореме Пифагора $AB^2 = BK^2 + AK^2 = 2 \cdot (3\sqrt{2})^2 = 36$, $AB = 6$ (см). Так как в параллелограмме противолежащие стороны равны, то $AB = CD = 6$ см. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна $S_{ABCD} = CD \cdot BL = 6 \cdot 5 = 30$ (см^2).

10. О т в е т: 24.

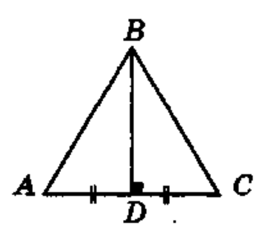


Задача может быть решена несколькими способами.

Решение. 1 способ. Проведем из вершины B прямоугольной трапеции $ABCD$ высоту BH. Тогда трапеция разобьется на три равных прямоугольных треугольника, катеты которых равны 4. Площадь каждого треугольника равна $S = \frac{1}{2} \cdot 4^2 = 8$, значит, площадь трапеции равна сумме площадей трех прямоугольных равнобедренных треугольников, т. е. 24.

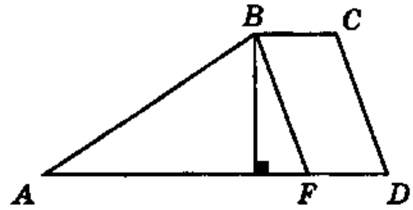
2 способ. Катет прямоугольного равнобедренного треугольника ABD является гипотенузой прямоугольного равнобедренного треугольника BCD. Площадь трапеции равна сумме площадей двух прямоугольных равнобедренных треугольников ABD и BCD, стороны которых равны 4 и $4\sqrt{2}$; $S_{BCD} = \frac{1}{2}4^2 = 8$, $S_{ABD} = \frac{1}{2}(4\sqrt{2})^2 = 16$, $S = S_{BCD} + S_{ABD} = 8 + 16 = 24$.

11. О т в е т: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Решение. В равнобедренном треугольнике ABC медиана BD является его высотой, значит, отрезок BD — высота и треугольник ABD — прямоугольный, у которого $AB = a$, $AD = \frac{a}{2}$. По теореме Пифагора $BD^2 = AB^2 - AD^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}a^2$, $BD = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Следовательно, $BD : AB = \frac{\sqrt{3}}{2}a : a = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

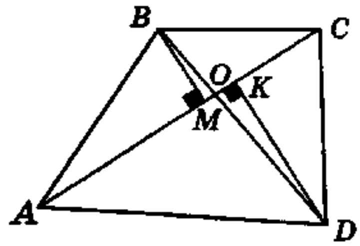
12. Ответ: 1,8.



Решение. В трапеции $ABCD$ высота BH является общей высотой для треугольника FBG и трапеции $ABCD$. Основание треугольника ABF лежит на основании трапеции $ABCD$ и равно 10 см, так как четырехугольник $FBCD$ — параллелограмм по определению ($AD \parallel BC$, $FB \parallel CD$). Значит, $AF = 10$ см.

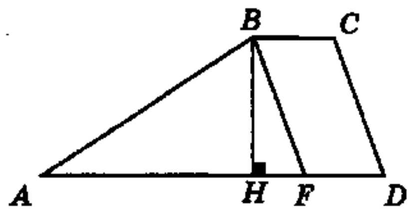
$$S_{FBG} = \frac{1}{2}AF \cdot BH = 5BH;\ S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot BH = 9BH;\ S_{BCD} : S_{ABF} = 9BH : 5BH = 1{,}8.$$

Часть 3



13. Решение. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник. Проведем перпендикуляры BM и DK к диагонали AC. По условию $S_{ABC} = S_{ADC}$, следовательно, $BM = DK$. Углы BOM и DOK равны, как вертикальные. Следовательно, прямоугольные треугольники BOM и DOK равны (по катету и острому углу), отсюда $BO = DO$. Аналогично, из равенства $S_{ABD} = S_{CBD}$ получим, что $AO = CO$. Таким образом, в четырехугольнике $ABCD$ диагонали точкой пересечения делятся пополам, следовательно, четырехугольник $ABCD$ параллелограмм.

14. Ответ: 153,6.



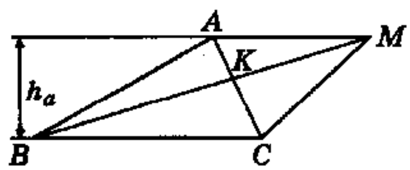
Решение. Через вершину B трапеции $ABCD$ проведем прямую BF, параллельную стороне CD. Тогда четырехугольник $FBCD$ — параллелограмм, так как $BC \parallel AD$ по определению трапеции, $BF \parallel CD$ по построению.

Следовательно, $BF = CD = 12$ (см); $FD = BC = 6$ (см). Таким образом, в треугольнике ABF стороны равны 12 см, 16 см и 20 см. Так как длины сторон этого треугольника удовлетворяют условию теоремы, обратной теореме Пифагора, то этот треугольник — прямоугольный. Следовательно, $S_{ABF} = \frac{1}{2}AB \cdot BF = 96$ (см^2). Высота BH треугольника ABF является также высотой параллелограмма $ABCD$; $BH = \frac{2S_{ABF}}{AF} = 9{,}6$ (см).

Площадь трапеции можно найти двумя способами.

1. $S_{ABCD} = S_{ABF} + S_{BCDF}$; $S_{BCDF} = BC \cdot BH = 57{,}6$ (см^2); $S_{ABCD} = 153{,}6$ см^2.

2. $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BH = 153{,}6$ (см^2).



15. Решение. Прямая параллельна стороне BC, значит, все треугольники BMC равновелики треугольнику ABC. Из площадей равновеликих треугольников ABC и BMC вычтем общую часть — площадь треугольника BKC и получим равновеликие треугольники BAK и CMK. Теперь к площадям равновеликих треугольников BAK и CMK прибавим общую часть — площадь треугольника AKM. Таким образом получили, что треугольники ABM и ACM равновелики.

ТЕСТ 3

Вариант 1

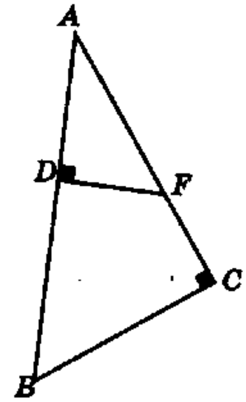
Часть 1

1. Ответ: 2.

Решение. Тройка чисел 2, 8, 10 пропорциональна числам 1, 4 и 5, так как $\frac{2}{1} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5} = 2$.

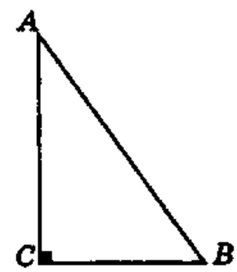
2. Ответ: 3.

Решение. Прямоугольные треугольники ABC и FDA подобны и при этом $\angle ACB = \angle ADF$, как прямые, $\angle CAB = \angle DAF$ — общий, $\angle ABC = \angle AFD$ по теореме о сумме углов треугольника. Значит, стороны AF и AB, AD и AC, DF и CB составляют пары сходственных сторон и они пропорциональны. Следовательно, $\frac{AF}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{DF}{CB}$.



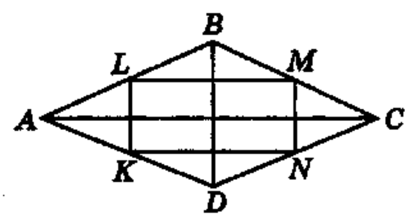
3. Ответ: 2.

Решение. Косинусом острого угла B прямоугольного треугольника ABC является отношение прилежащего катета CB к гипотенузе AB: $\cos B = \frac{CB}{AB}$.



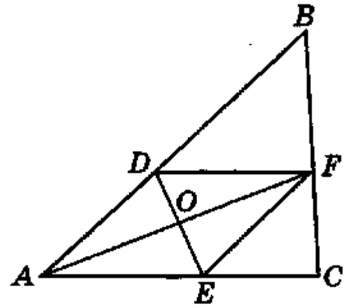
4. Ответ: 2.

Решение. Стороны четырехугольника $KLMN$, вершинами которого являются середины сторон ромба $ABCD$, попарно параллельны его диагоналям по теореме о средней линии треугольника. Стороны KL и MN параллельны его диагонали BD, а стороны LM и KN параллельны диагонали AC. Следовательно, четырехугольник $KLMN$ — параллелограмм. Так как диагонали AC и BD ромба перпендикулярны, то углы параллелограмма прямые, т. е. параллелограмм $KLMN$ — прямоугольник. Ромб $ABCD$ отличен от квадрата, значит, его диагонали AC и BD не равны, поэтому не равны и соседние стороны KL и LM прямоугольника. Следовательно, прямоугольник $KLMN$ не является квадратом.



5. Ответ: 3.

Решение. Найдем сторону ромба $ADFE$. Так как диагонали ромба перпендикулярны и точкой пересечения O делятся пополам, то треугольник AOD — прямоугольный и его стороны AO и OD соответственно равны 3 см и 4 см. Отсюда гипотенуза AD равна 5 см по теореме Пифагора. У ромба $ADFE$ противоположные стороны DF и AE параллельны. Значит, треугольники ABC и DBF подобны по первому признаку подобия треугольников. Сторона AB треугольника ABC равна 15 см, а отрезок AD равен 5 см, следовательно, отрезок BD равен 10 см. Из подобия треугольников следует: $\frac{BD}{AD} = \frac{BF}{FC}$; $\frac{BF}{FC} = \frac{10}{5} = 2$, то $BF : FC = 2 : 1$.



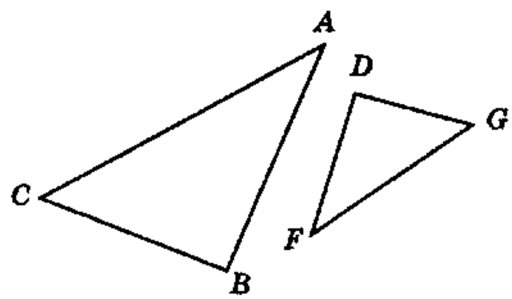
Часть 2

6. Ответ: $\frac{2}{3}$.

Решение. По условию треугольники ABC и FDG подобны, значит, $\frac{S_{ABC}}{S_{FDG}} = k^2 = \frac{4}{9}$. Следовательно, $k = \frac{2}{3}$.

7. Ответ: 30.

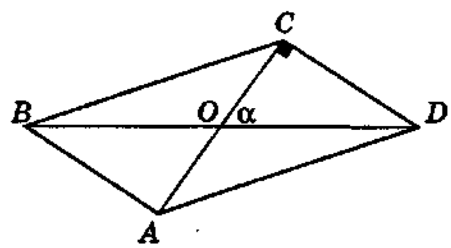
Решение. По условию треугольники ABC и FDG подобны, значит, $AB = kFD$; $BC = kDG$; $AC = kFG$. Отсюда, $P_{ABC} = kP_{FDG}$. По условию $k = \frac{5}{3}$. Следовательно, $P_{ABC} = \frac{5}{3} \cdot 18 = 30$ (см).



8. Ответ: 135.

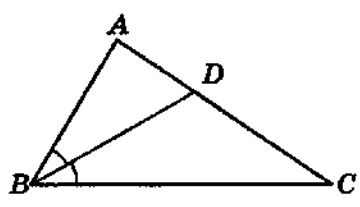
Решение. Так как диагональ AC перпендикулярна стороне CD, то треугольник OCD — прямоугольный, в котором катет OC равен 3 см, гипотенуза OD равна $3\sqrt{2}$ см. Обозначим угол COD буквой α; $\cos\alpha = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, следовательно, $\angle COD = 45°$.

Значит, $\angle BOC = 135°$.

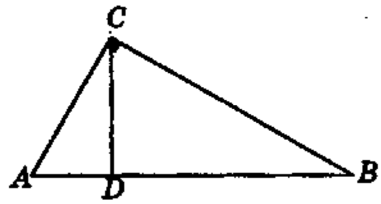


9. Ответ: 6.

Решение. Так как BD — биссектриса треугольника ABC, то по свойству биссектрисы треугольника $\frac{AD}{AB} = \frac{CD}{BC}$; $\frac{3}{AB} = \frac{5}{10}$, отсюда, $AB = \frac{30}{5} = 6$ (см).

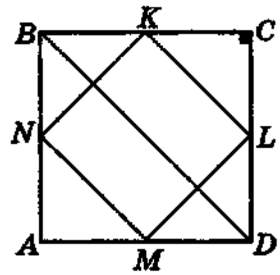


10. Ответ: 12.



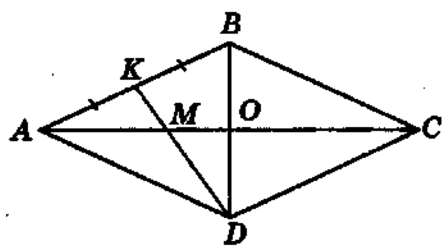
Решение. По условию $AB = 26$ см, $AD = 8$ см, значит, $DB = 18$ см. Высота CD прямоугольного треугольника ABC по свойству высоты прямоугольного треугольника равна $CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{18 \cdot 8} = 12$ (см).

11. Ответ: 52.



Решение. По условию диагональ квадрата $ABCD$ равна 26 см. В треугольнике BCD точки K и L — середины сторон BC и CD соответственно, следовательно, отрезок KL — средняя линия треугольника BCD и равна 13 см. Аналогично, отрезок NM — средняя линия треугольника ABD и равна 13 см. Значит, четырехугольник $KLMN$ — параллелограмм. В квадрате диагонали равны, значит, в параллелограмме $KLMN$ все стороны равны, тогда четырехугольник $KLMN$ — ромб. В квадрате диагонали перпендикулярны, следовательно, углы ромба $KLMN$ — прямые. Значит, ромб $KLMN$ — квадрат; $P_{KLMN} = 4KL = 52$ (см).

12. Ответ: 16.

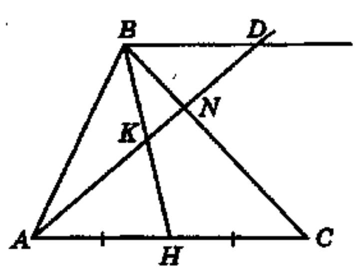


Решение. В треугольнике ABD отрезки DK и AO — медианы, так как в первом случае $AK = KB$, а во втором точка O является точкой пересечения медиан ромба. Следовательно, точка M является точкой пересечения медиан DK и AO и делит отрезок AO в отношении $2 : 1$, считая отрезок от вершины A. Отсюда отрезок $MO = \frac{1}{3}AO = \frac{1}{6}AC = 4$ (см); $MC = MO + OC = 4 + 12 = 16$ (см).

Часть 3

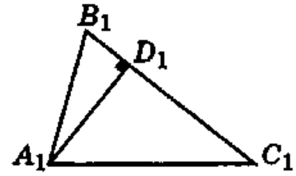
13. Ответ: 1 : 1.

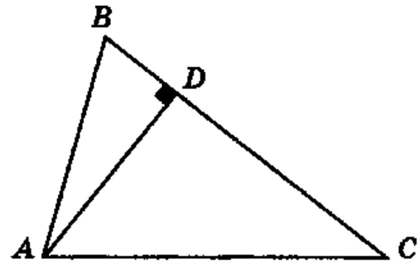
Решение. Углы DAC и ADB равны как накрест лежащие при параллельных прямых AC и BD и секущей AD. Углы ANC и DNB равны как вертикальные. Следовательно, треугольники ANC и DNB подобны по двум углам. Так как $BN : NC = 1 : 2$, то $BD = \frac{1}{2}AC$, т. е. $AH = BD$.



Углы AHB и DBH равны как накрест лежащие при параллельных прямых AC и BD и секущей BH. Треугольники KAH и KDB равны по стороне и прилежащим углам ($AH = BD$, $\angle AHB = \angle DBH$, $\angle DAC = \angle ADB$). Следовательно, $KH = KB$, значит, точка K делит медиану BH пополам.

14. Ответ: 3 : 2.

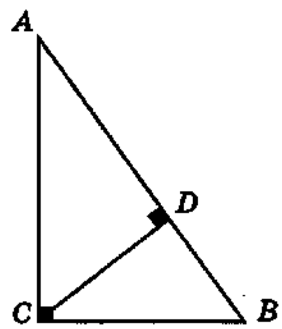




Решение. По условию треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны и их стороны BC и B_1C_1 сходственные, значит, $\frac{BC}{B_1C_1} = k$; $BC = kB_1C_1$. Кроме того, $AD = \frac{2}{3}BC = \frac{2kB_1C_1}{3}$; $S_{ABC} = \frac{1}{2}BC\cdot AD$; $S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}B_1C_1\cdot A_1D_1$.

Отсюда, по теореме об отношении площадей подобных фигур $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = k^2$; $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{BC\cdot AD}{B_1C_1\cdot A_1D_1}$; $k^2 = \frac{BC\cdot AD}{B_1C_1\cdot A_1D_1} = \frac{kB_1C_1\cdot 2kA_1D_1}{3B_1C_1\cdot A_1D_1}$; $1 = \frac{2B_1C_1}{3A_1D_1}$; $\frac{3}{2} = \frac{B_1C_1}{A_1D_1}$. Таким образом, сторона C_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$ относится к его высоте A_1D_1 как 3 : 2.

15. Решение. Треугольники BDC и ADC — прямоугольные, так как $CD \perp AB$. Обозначим $\angle A$ буквой α. Тогда, $AD = AC\cdot\cos\alpha$; $BD = BC\cos(90^\circ - \alpha)$; $\cos\alpha = \frac{AC}{AB}$; $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{BC}{AB}$; получим: $AD = AC\cdot\frac{AC}{AB} = \frac{AC^2}{AB}$; $BD = BC\cdot\frac{BC}{AB} = \frac{BC^2}{AB}$; $\frac{BD}{AD} = \frac{BC^2}{AC^2}$.



Вариант 2

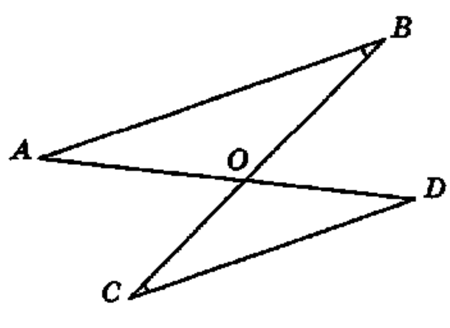
Часть 1

1. Ответ: 4.

Решение. Тройка чисел 6, 9, 12 пропорциональна числам 2, 3 и 4, так как $\frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \frac{12}{4} = 3$.

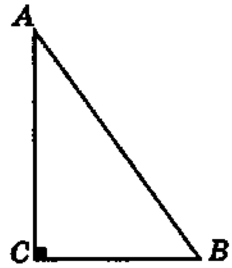
2. Ответ: 1.

Решение. Треугольники AOB и COD подобны и при этом $\angle OCD = \angle OAD$ по условию, $\angle AOB = \angle COD$ как вертикальные, $\angle BAO = \angle CDO$ по теореме о сумме углов треугольника. Значит, стороны AO и OD, BO и CO, AB и DC составляют пары сходственных сторон и они пропорциональны. Следовательно, $\frac{DO}{AO} = \frac{CO}{BO} = \frac{CD}{AB}$.



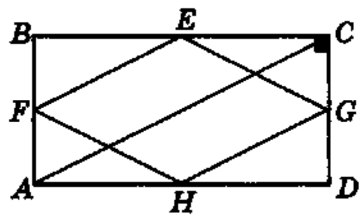
3. Ответ: 2.

Решение. Синусом острого угла A прямоугольного треугольника ABC является отношение противолежащего катета CB к гипотенузе AB: $\sin B = \frac{CB}{AB}$.



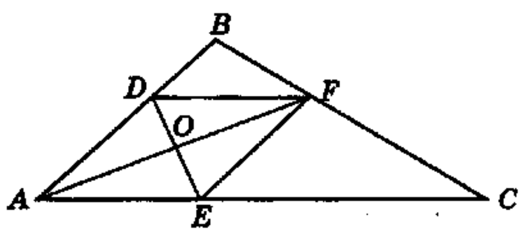
4. Ответ: 3.

Решение. Стороны четырехугольника $FEGH$, вершинами которого являются середины сторон прямоугольника $ABCD$, равны. Стороны FE и HG параллельны его диагонали AC, а стороны EG и FH параллельны диагонали BD. Диагонали прямоугольника равны, следовательно, четырехугольник $FEGH$ — ромб. Но квадрат тоже ромб. Прямоугольные треугольники FBE, ECG, GDH и HAF равны по двум катетам. Так как у прямоугольника $ABCD$ соседние стороны не равны (для определенности $BC > AB$), то у этих треугольников острые углы не равны, причем углы BEF и CEG меньше углов EFB и EGC. Значит, $\angle BEF + \angle CEG < 90°$ и $\angle EFB + \angle EGC < 90°$. Тогда угол FEG равен разности развернутого угла с вершиной в точке E и углов BEF и CEG, т. е. $\angle FEG = 180° - (\angle BEF + \angle CEG) > 180° - 90° > 90°$. Аналогично доказывается, что $\angle EGH < 90°$. Таким образом, доказано, что четырехугольник $FEGH$ имеет равные стороны и его углы не равны $90°$, следовательно, четырехугольник $FEGH$ — ромб.



5. Ответ: 2.

Решение. Найдем сторону ромба $ADFE$. Так как диагонали ромба перпендикулярны и точкой пересечения O делятся пополам, то треугольник AOD — прямоугольный и его стороны AO и OD соответственно равны 6 см и 8 см. Отсюда гипотенуза AD равна 10 см по теореме Пифагора. У ромба $ADFE$ противоположные стороны DF и AE параллельны. Значит, треугольники ABC и DBF подобны по первому признаку подобия треугольников. Сторона AB треугольника ABC равна 15 см, а отрезок AD равен 10 см, следовательно, отрезок BD равен 5 см. Из подобия треугольников следует:



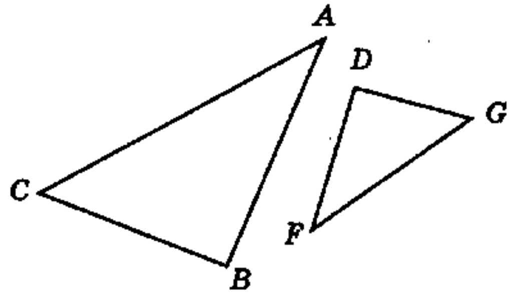
$\frac{BD}{AD} = \frac{BF}{FC}$; $\frac{BD}{AD} = \frac{5}{10}$, тогда $BF : FC = 1 : 2$.

Часть 2

6. Ответ: $\frac{1}{2}$.

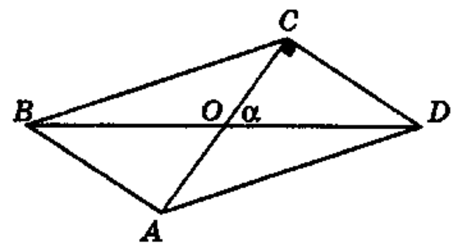
Решение. По условию треугольники ABC и FDG подобны, значит, $\frac{S_{ABC}}{S_{FDG}} = k^2 = \frac{1}{4}$. Следовательно, $k = \frac{1}{2}$.

7. Ответ: 30.



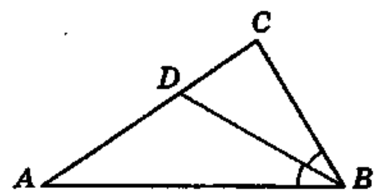
Решение. По условию треугольники ABC и FDG подобны, значит, $AB = kFD$; $BC = kDG$; $AC = kFG$. Отсюда, $P_{ABC} = kP_{FDG}$. По условию $k = \frac{4}{3}$. Следовательно, $P_{ABC} = \frac{4}{3} \cdot 42 = 56$ (см).

8. Ответ: 120.



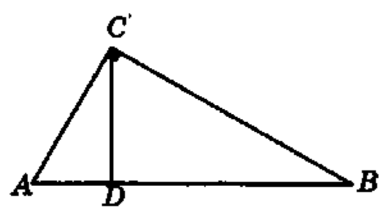
Решение. Так как диагональ AC перпендикулярна стороне CD, то треугольник OCD — прямоугольный, в котором катет OC равен 3 см, а катет CD равен $\sqrt{3}$ см. Обозначим угол COD буквой α, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$, следовательно, $\angle COD = 60$. Значит, $\angle BOC = 120°$.

9. Ответ: 6,8.



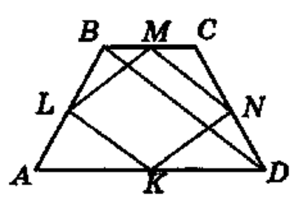
Решение. Обозначим меньший из отрезков CD буквой x, тогда $AD = 6 - x$. Так как BD — биссектриса треугольника ABC, то по свойству биссектрисы треугольника $\frac{AD}{AB} = \frac{CD}{BC}$; $\frac{17 - x}{15} = \frac{x}{10}$, отсюда, $x = 6{,}8$, $CD = 6{,}8$ (см).

10. Ответ: 12.



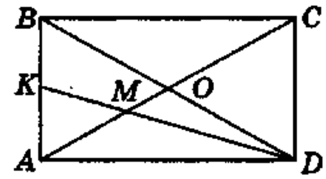
Решение. По условию $AB = 16$ см, $BD = 7$ см, значит, $AD = 9$ см. Катет AC прямоугольного треугольника ABC по свойству катета прямоугольного треугольника равен $AC = \sqrt{AD \cdot AB} = \sqrt{9 \cdot 16} = 12$ (см).

11. Ответ: 52.



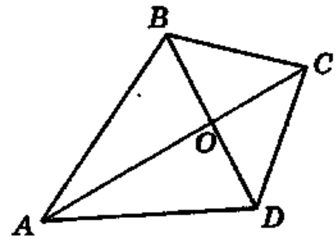
Решение. По условию диагональ трапеции $ABCD$ равна 26 см. В треугольнике BCD точки M и N — середины сторон BC и CD соответственно, следовательно, отрезок MN — средняя линия треугольника BCD и равна 13 см. Аналогично отрезок KL — средняя линия треугольника ABD и равна 13 см. Значит, четырехугольник $KLMN$ — параллелограмм. В равнобедренной трапеции диагонали равны, следовательно, в параллелограмме $KLMN$ все стороны равны, значит, параллелограмм $KLMN$ — ромб; $P_{KLMN} = 4MN = 52$ (см).

12. О т в е т: 8.



Решение. В треугольнике ABD отрезки DK и AO — медианы, так как в первом случае $AK = KB$; так как точка K — середина стороны AB, а во втором точка O является точкой пересечения медиан прямоугольника $ABCD$. Следовательно, точка M является точкой пересечения медиан DK и AO и делит отрезок AO в отношении $2:1$, считая от вершины A. В прямоугольнике медианы равны $AC = BD = 24$ см. Отсюда отрезок $AM = \frac{2}{3}AO = \frac{1}{3}AC = 8$ см.

Часть 3



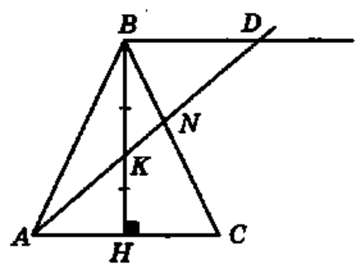
13. Решение. Так как $AC \perp BD$, то треугольники AOB, AOD, BOC и DOC — прямоугольные. Поэтому по теореме Пифагора:

$AB^2 = AO^2 + BO^2$, $BC^2 = OC^2 + BO^2$,

$CD^2 = OC^2 + OD^2$, $AD^2 = OC^2 + OD^2$.

Отсюда, $AB^2 + CD^2 = AO^2 + BO^2 + OC^2 + OD^2$ и $BC^2 + AD^2 = BO^2 + OC^2 + AO^2 + OD^2$, т.е. $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$, что и требовалось доказать.

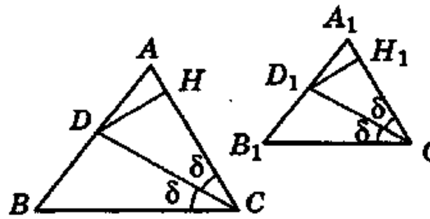
14. О т в е т: 1 : 2.



Решение. Углы DAC и ADB равны как накрест лежащие при параллельных AC и BD и секущей AD. Так как прямые AC и BD параллельны, то треугольники KAH и KDB — прямоугольные (BH — высота равнобедренного треугольника ABC) и равны по катету ($KH = KB$, K — середина высоты BH) и острому углу ($\angle HKA = \angle BKD$ как вертикальные). Следовательно, $BD = AH = \frac{1}{2}AC$ по свойству высоты равнобедренного треугольника.

Кроме того, треугольники ANC и DNB подобны по двум углам: углы DAC и FDB равны по доказанному, углы ANC и DNB равны, как вертикальные. Следовательно, $\frac{BN}{NC} = \frac{BD}{AC} = \frac{1}{2}$, т. е. $BN : NC = 1 : 2$.

15. О т в е т: 3 : 2.



Решение. По условию треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны и их стороны AB и A_1B_1 сходственные, значит, $\frac{AB}{A_1B_1} = k$; $AB = k\,A_1B_1$. Кроме того, $CD = \frac{2}{3}AB = \frac{2kA_1B_1}{3}$. Проведем в треугольниках ACD и $A_1C_1D_1$ высоты BH и B_1H_1.

Треугольник HCD — прямоугольный, в котором BH — катет, а CD — гипотенуза, значит, $DH = CD \cdot \sin\delta$; $S_{ADC} = \frac{1}{2}AC \cdot DH = SAC \cdot CD \cdot \sin\delta$. Аналогично $S_{A_1B_1C_1} =$

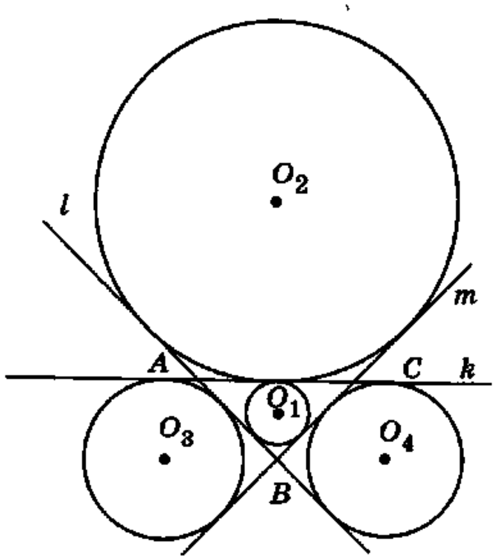
$= \frac{1}{2}BC \cdot CD \cdot \sin\delta$. Отсюда $S_{ABC} = S_{ADC} + S_{BDC} = \frac{1}{2}CD \cdot \sin\delta \cdot (AC + BC)$. Аналогично находим $S_{A_1B_1C_1} = S_{A_1D_1C_1} + S_{B_1D_1C_1} = \frac{1}{2}C_1D_1 \cdot \sin\delta \cdot (A_1C_1 + B_1C_1)$. Так как треугольники подобны, то $AC + BC = k(A_1C_1 + B_1C_1)$. По теореме об отношении площадей подобных фигур $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = k^2$; $\frac{\frac{1}{2}CD \cdot \sin\delta(AC + BC)}{\frac{1}{2}C_1D_1 \cdot \sin\delta(A_1C_1 + B_1C_1)} = \frac{\frac{2kA_1B_1}{3}k(A_1C_1 + B_1C_1)}{C_1D_1(A_1C_1 + B_1C_1)} = \frac{2k^2A_1B_1}{3C_1D_1} = k^2$; $\frac{2A_1B_1}{3C_1D_1} = 1$; $\frac{A_1B_1}{C_1D_1} = \frac{3}{2}$.

ТЕСТ 4

Вариант 1

Часть 1

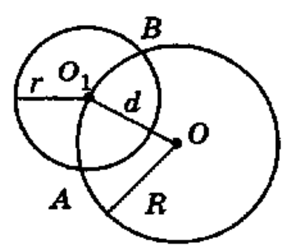
1. Ответ: 4.



Решение. Три попарно пересекающиеся прямые делят плоскость на семь частей. Четыре из них ограничены тремя данными прямыми: треугольник ABC и три части, определяемые одной из сторон треугольника, и двумя другими прямыми. Три другие части ограничены двумя лучами, являющимися продолжением сторон каждого из углов треугольника. Значит, только в четыре части плоскости можно вписать окружность так, чтобы она одновременно касалась каждой из трех прямых k, l и m.

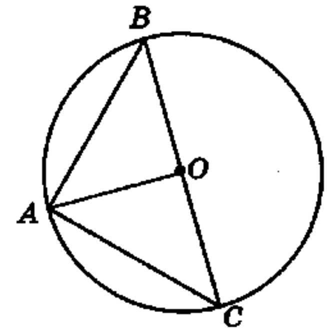
2. Ответ: 3.

Решение. Так как расстояние между центрами окружностей $d = 9$ см меньше суммы длин радиусов $R + r = 9 + 6 = 15$ (см), то окружности имеют две общие точки A и B. Заметим, поскольку расстояние между центрами окружностей $d = 9$ см равно радиусу большей окружности R, то центр меньшей окружности лежит на большей окружности.



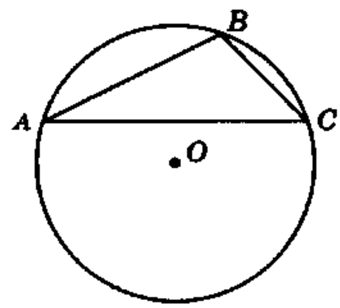
3. **Ответ: 1.**

Решение. Точка O пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника ABC является центром окружности, описанной около этого треугольника. Значит, вписанный угол BAC — прямой. Следовательно, треугольник ABC — прямоугольный.



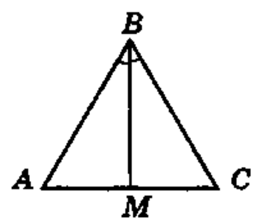
4. **Ответ: 3.**

Решение. По условию углы треугольника ABC равны 27°, 108° и 45°. Значит, треугольник ABC — тупоугольный. Угол ABC — тупой, следовательно, дуга ADC больше полуокружности, отсюда точки B и O лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AC. Следовательно, центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит вне треугольника.



5. **Ответ: 1.**

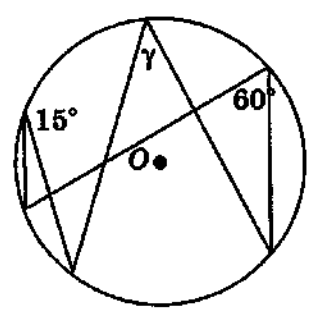
Решение. Центр вписанной окружности треугольника лежит на биссектрисе угла, а центр описанной окружности треугольника лежит на серединном перпендикуляре. По условию центры вписанной и описанной окружностей треугольника лежат на одной из его высот, следовательно, в данном треугольнике биссектриса, высота и серединный перпендикуляр совпадают. Значит, треугольник — равнобедренный.



Часть 2

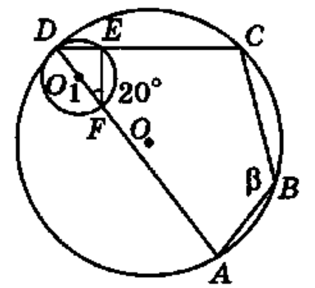
6. **Ответ: 45.**

Решение. Угол γ является вписанным углом GDB, который опирается на дугу GB. Дуга GB равна разности дуг окружности BC и CG. Так как углы BAC и CFG — вписанные, то дуги BC и CG соответственно равны 120° и 30°. Следовательно, дуга GB равна 90°, а угол GDB — 45°.



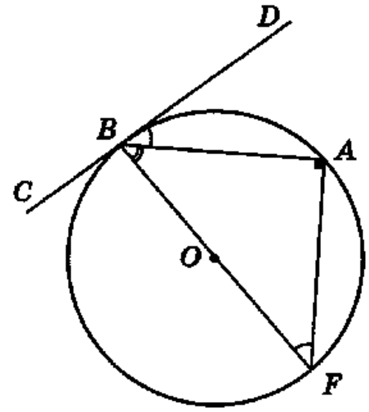
7. **Ответ: 110.**

Решение. Треугольник FDE — вписанный в окружность с центром O_1, причем центр O_1 лежит на стороне DF треугольника FDE. Отсюда $\triangle FDE$ — прямоугольный, в котором вписанный $\angle FDE = 70°$. Точка D — общая для обеих окружностей, значит, $\angle ADC$ — вписанный в окружность с центром в точке O. Так как четырехугольник $ABCD$ вписанный, то угол ABC дополняет угол ADC до $180°$. Значит, $\angle ABC = \beta = 110°$.



8. Ответ: 20.

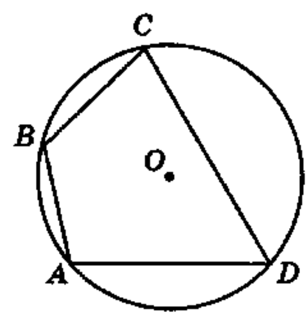
Решение. Проведем диаметр BF. Треугольник ABF — прямоугольный, поэтому $\angle BAF + \angle AFB = 90°$. Так как диаметр BF проведен в точку касания прямой CD и окружности, то $\angle FBD = \angle ABD + \angle ABF = 90°$. Следовательно, $\angle AFB = \angle ABD$. По теореме о вписанных углах $\angle AFB = \frac{1}{2}\cup AB$, значит, и $\angle ABD = \frac{1}{2}\cup AB$. По условию задачи $\cup AB = 40°$, отсюда $\angle ABD = 20°$.



9. Ответ: 65.

Решение. Так как вершины четырехугольника $ABCD$ лежат на окружности, то все его углы вписанные. Угол BCD опирается на дугу DAB, равную сумме дуг BC и CD, $\cup BAD = \cup BC + \cup CD = 56° + 133° = 189°$. Угол DAB опирается на дугу, дополняющую дугу BAD до $360°$, т. е. дугу BCD, равную $171°$.

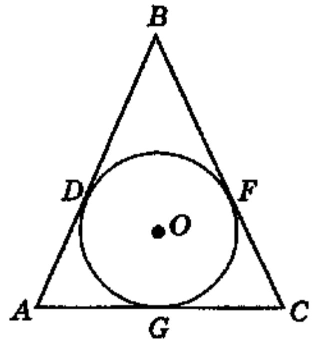
Угол ADC опирается на дугу ABC, равную сумме дуг AB и BC, $\cup AC = \cup AB + \cup BC = 56° + 74° = 130°$. Угол ABC опирается на дугу, дополняющую дугу ABC до $360°$, т. е. дугу ADC, равную $230°$.



Таким образом, на наименьшую дугу ADC, равную $130°$, опирается $\angle ADC$, следовательно, $\angle ADC = 65°$.

10. Ответ: 16.

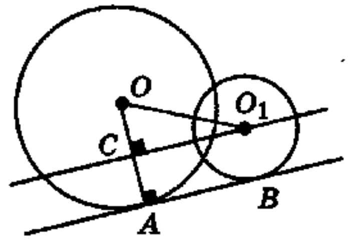
Решение. По свойству касательных к окружности, $BF = BD$, $AD = AG$, $CG = FC$. Так как центр вписанной окружности лежит на биссектрисе угла при вершине, а биссектриса угла при вершине в равнобедренном треугольнике является его медианой, то точка G — середина стороны AC. Следовательно, $AD = AG = CG = FC = 2$ см, а $BF = BD = 4$ см, находим $P_{ABC} = 16$ см.



11. Ответ: 17.

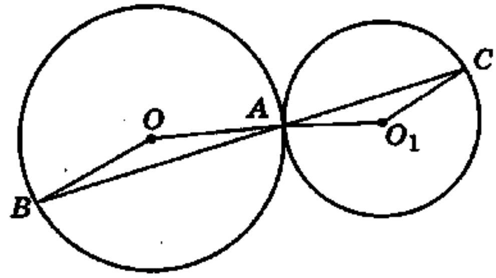
Решение. Через точку O_1 проводим прямую, параллельную прямой AB. Отрезок AO перпендикулярен прямой AB (радиус, проведенный в точку касания), значит, отрезок AO

перпендикулярен и прямой, параллельной прямой AB, точку их пересечения обозначим C. К прямоугольному треугольнику OCO_1 применим теорему Пифагора. Гипотенуза — искомое расстояние OO_1, один катет равен 15 см, второй катет равен разности радиусов окружностей $12 - 4 = 8$ (см). Отсюда $OO_1 = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17$ (см).



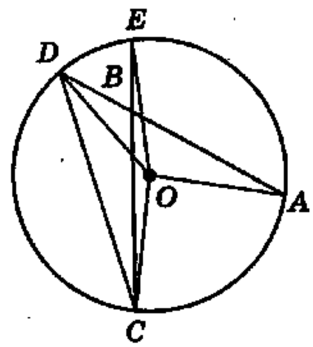
12. Ответ: 15.

Решение. Треугольник AOB — равнобедренный, так как его стороны OA и OB являются радиусами одной окружности. Аналогично, треугольник AO_1C — равнобедренный. Равнобедренные треугольники AOB и AO_1C — подобны, так как углы OAB и O_1AC — вертикальные, а, значит, равны. Коэффициент подобия равен 3 ($OA = 9$ см, $AO_1 = 3$ см), $AB = 3AC = 15$ см.



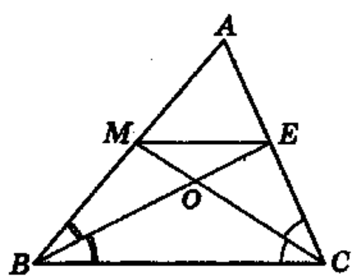
Часть 3

13. Решение. Проведем хорду DC. Рассмотрим $\triangle DBC$. Угол ABC является внешним углом треугольника DBC при вершине B. В силу теоремы о внешнем угле треугольника $\angle ABC = \angle BDC + \angle BCD$. Углы BDC и BCD, как вписанные, равны половинам соответствующих центральных углов, т. е. $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC + \frac{1}{2}\angle DOE$. В свою очередь, градусная мера дуги AC равна градусной мере угла AOC, а градусная мера дуги DE равна градусной мере $\angle EOD$. Следовательно, градусная мера угла ABC равна полусумме градусных мер дуг, из которых одна заключена между его сторонами, а другая между продолжениями сторон.



14. Ответ: 30.

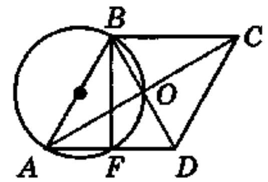
Решение. По условию $\angle BAC = 60°$, значит, $\angle ABC + \angle ACB = 120°$. Так как BE и CM — биссектрисы углов ABC и ACB, то $\angle ABE + \angle ACM = 60°$ и в треугольнике BOC $\angle BOC = 120°$. В четырехугольнике $MAEO$: $\angle MAE = 60°$, $\angle MOE = 120°$, значит, около него можно описать окружность. В этой окружности вписанный угол MAE, равный $60°$, опирается на дугу ME, равную $120°$. Отрезок AO является биссектрисой угла MAE, так как проходит через точку пересечения биссектрис (точка O). Следовательно, точка O является серединой дуги ME и делит ее на две дуги. Значит, дуга MO равна $60°$. Отсюда угол BEM равен $30°$.



15. Ответ: 60.

Решение. Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма, F — середина AD. Так как угол AOB — вписанный и опирается на диаметр, то $\angle AOB = 90°$, т. е. диагонали параллелограмма перпендикулярны. Следовательно, $ABCD$ — ромб и $AB = AD$.

Угол AFB — также вписанный и опирается на диаметр, поэтому $\angle AFB = 90°$. Следовательно, BF — медиана и высота треугольника ABD, значит, треугольник ABD — равнобедренный и $AB = BD$. Таким образом, $AB = AD$ и $AB = BD$, значит, треугольник ABD — равносторонний, т. е. $\angle DAB = 60°$.

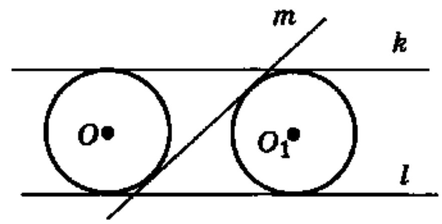


Вариант 2

Часть 1

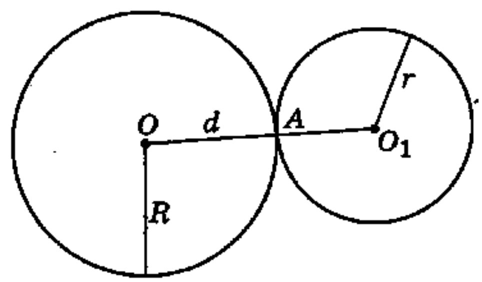
1. Ответ: 3.

Решение. Две параллельные прямые k и l делят плоскость на три части. А прямая m делит каждую из них на две части, таким образом получаем шесть частей. Две из них ограничены тремя данными прямыми, четыре другие части ограничены двумя лучами. Значит, только в две части плоскости можно вписать окружность так, чтобы она одновременно касалась каждой из трех прямых k, l и m.



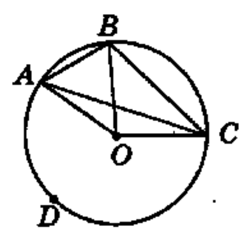
2. Ответ: 2.

Решение. Так как расстояние между центрами окружностей $d = 11$ см равно сумме длин радиусов $R + r = 7 + 4 = 11$ (см), то окружности имеют одну общую точку A. Следовательно, окружности касаются.



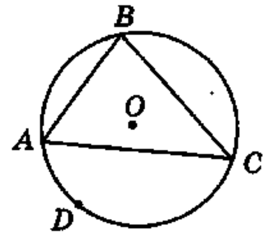
3. Ответ: 3.

Решение. Точка O пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника ABC является центром окружности, описанной около этого треугольника. Отсюда $OA = OB = OC$ как радиусы одной окружности. Значит, треугольники AOC, AOB и BOC — равнобедренные и боковые стороны у них равны. В треугольнике AOC $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$. Отсюда следует, что в треугольнике ABC сторона AC — большая, а против большей стороны лежит больший угол. Значит, в треугольнике ABC $\angle ABC$ — больший. Точки B и O лежат по разные стороны относительно хорды AC, так как точка пересечения серединных перпендикуляров лежит вне треугольника. При этом $\angle AOC$ опирается на дугу ABC, которая меньше $180°$. Значит, $\angle ABC$ опирается на дугу ADC, которая больше $180°$. Следовательно, вписанный угол ABC — больше $90°$, а треугольник $\angle ABC$ — тупоугольный.



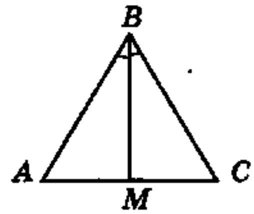
4. Ответ: 1.

Решение. По условию углы треугольника ABC равны $45°$, $60°$ и $75°$. Значит треугольник ABC — остроугольный. Угол ABC — острый, следовательно, дуга ADC меньше полуокружности, отсюда точки B и O лежат в одной полуплоскости относительно прямой AC. Аналогично доказывается, что точки A и O



лежат в одной полуплоскости относительно прямой BC. Значит, точка O лежит внутри угла ACB. Аналогично доказывается, что точка O лежит внутри углов ABC и BAC. Следовательно, центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит внутри треугольника.

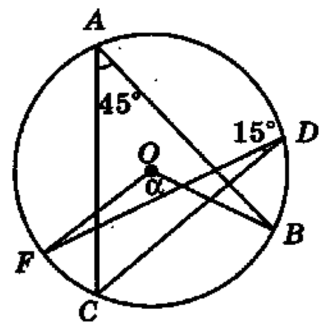
5. О т в е т: 2.



Решение. Центр вписанной окружности треугольника лежит на биссектрисе угла, а центр описанной окружности треугольника лежит на серединном перпендикуляре. По условию центры вписанной и описанной окружностей треугольника совпадают, следовательно, в данном треугольнике точка пересечения биссектрис, проведенных к сторонам треугольника, совпадает с точкой пересечения серединных перпендикуляров, проведенных к этим же сторонам треугольника. Следовательно, треугольник — равносторонний.

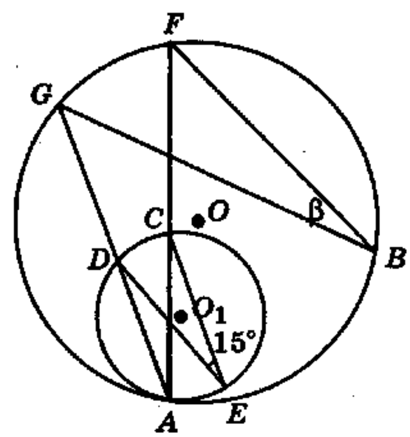
Часть 2

6. О т в е т: 120.



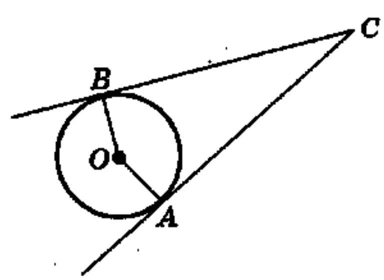
Решение. Угол α является центральным углом FOB, который опирается на дугу FCB. Дуга FCB равна сумме дуг окружности FC и CB. Так как углы BAC и CDF — вписанные, то дуги FC и CB соответственно равны $30°$ и $90°$. Следовательно, дуга FCB равна $120°$, значит, угол FOB равен $120°$.

7. О т в е т: 15.



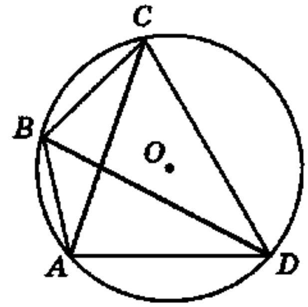
Решение. Углы CAD и CED, вписанные в окружность с центром O_1, опираются на одну и ту же дугу. Значит, угол CAD равен $15°$. Углы GAF и GBF, вписанные в окружность с центром O также опираются на одну дугу. Значит, $\angle GBF = \beta = 15°$.

8. О т в е т: 72.



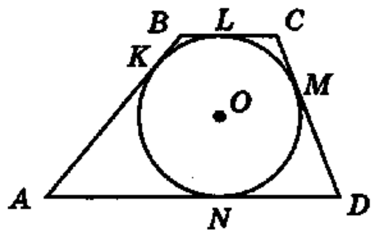
Решение. Соединим центр окружности O с точками касания B и A. Четырехугольник $AOBC$ — выпуклый, значит, сумма его углов равна $360°$. Углы OAC и OBC — прямые, так как OA и OB — радиусы, проведенные в точки касания. Центральный угол AOB равен $108°$, так как он опирается на дугу, равную $108°$. Значит, $\angle ACB = 360° - (90° + 90° + 108°) = 72°$.

9. Ответ: 55.



Решение. Так как четырехугольник $ABCD$ вписанный, то сумма противоположных углов равна 180°, т. е. $\angle ABC + \angle ADC = 180°$. В свою очередь $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$, отсюда $\angle ABD + \angle DBC + \angle ADC = 180°$. Значит, $\angle DBC = 180° - \angle ABD - \angle ADC = 180° - 50° - 75° = 55°$. Углы DBC и CAD опираются на одну дугу DC, следовательно, они равны, поэтому $\angle CAD = 55°$.

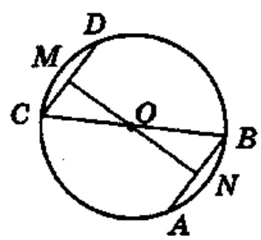
10. Ответ: 40.



Решение. 1 способ. Так как трапеция описана около окружности, то по свойству описанного четырехугольника сумма боковых сторон трапеции равна сумме ее оснований, т. е. $AD + BC = AB + CD$. По условию $AD + BC = 20$ (см), значит, периметр трапеции равен 40 см.

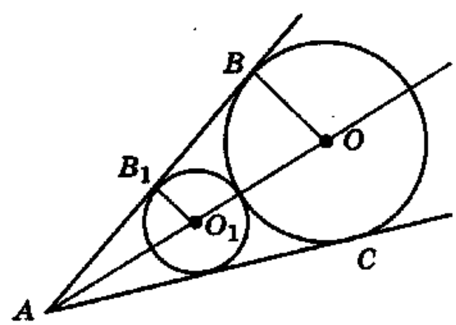
2 способ. По свойству касательных к окружности $AN = AK$, $BK = BL$, $CL = CM$, $DM = DN$. Отсюда, $AN + DN + BL + CL = AK + BK + CM + DM$, $AD + BC = AB + CD$. По условию $AD + BC = 20$ (см), значит, периметр трапеции равен 40 см.

11. Ответ: 16.



Решение. Через центр окружности — точку O, проведем перпендикуляр MN к параллельным хордам AB и CD. По свойству перпендикуляра, опущенного на хорду из центра окружности, $AN = BN$. Треугольник OBN — прямоугольный по построению. Применим теорему Пифагора к прямоугольному треугольнику OBN: $OB^2 = ON^2 + BN^2$, $ON^2 = OB^2 - BN^2$, отсюда $ON = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ (см). Из равенства прямоугольных треугольников OBN и OCM следует $ON = OM$. Следовательно, $MN = 16$ см.

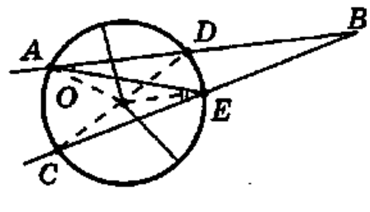
12. Ответ: 8.



Решение. Треугольник AO_1B_1 и AOB — прямоугольные, так как B и B_1 — точки касания, в которые проведены радиусы. Треугольники AO_1B_1 и AOB — подобны, так как угол BAO — общий, углы AB_1O_1 и ABO — прямые. Коэффициент подобия 3, поскольку $OO_1 = 2\,AO_1$, $AO = 3\,AO_1$. Следовательно, $OB = 3\,O_1B_1$, $O_1B_1 = 8$ см.

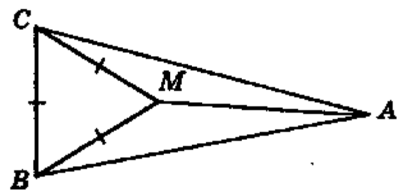
Часть 3

13. Решение. Проведем хорду AE. Рассмотрим треугольник ABE. Угол AEC является внешним углом треугольника DBC при вершине B. В силу теоремы о внешнем угле треугольника $\angle AEC = \angle BAE + \angle ABE$ или $\angle AEC = \angle BAE + \angle ABC$, отсюда $\angle ABC = \angle AEC -$

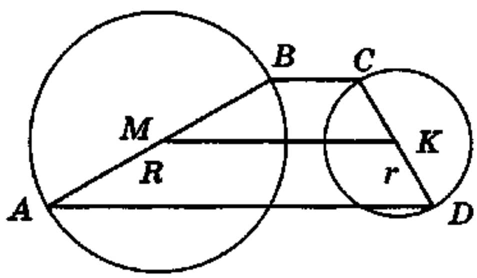


$-\angle BAE$. Углы AEC и BAE, как вписанные, равны половинам соответствующих центральных углов, т. е. $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC - \frac{1}{2}\angle DOE$. В свою очередь, градусная мера дуги AC равна градусной мере $\angle AOC$, а градусная мера дуги DE равна градусной мере $\angle EOD$. Следовательно, градусная мера $\angle ABC$ равна полуразности градусных мер дуг, заключенных внутри угла.

14. Ответ: 20.



Решение. По условию $\angle ABC = 80°$, а $ACB = 70°$, значит, $\angle ABC + \angle ACB = 150°$ и $\angle BAC = 30°$. Так как треугольник CMB — равносторонний, то $\angle BMC = 60°$. Около треугольника ABC можно описать окружность, В этой окружности вписанный угол BAC, равный $30°$, опирается на дугу BC. На эту же дугу BC опирается угол BMC, равный $60°$. Значит, угол BMC является центральным по отношению к углу BAC, а точка M — центром окружности, описанной около треугольника ABC. Следовательно, $AM = BM = CM$ и треугольник BMA — равнобедренный. Отсюда следует, что $\angle MAB = \angle ABM$; $\angle ABM = \angle ABC - \angle CBM = 80° - 60° = 20°$. Отсюда угол ABM равен $20°$.



15. Решение. Пусть $ABCD$ — данная трапеция, M и K — середины ее боковых сторон, являются центрами окружностей радиусов R и r.

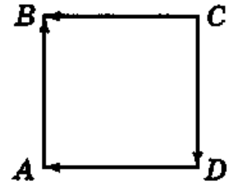
Так как трапеция является описанной, то $AD + BC = AB + CD$. Поскольку отрезок MK является средней линией трапеции, то $MK = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{2}(AB + CD) = R + r$. Следовательно, окружности касаются, что и требовалось доказать.

ТЕСТ 5

Вариант 1

Часть 1

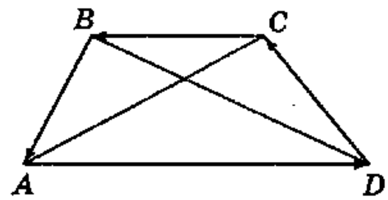
1. Ответ: 2.



Решение. Чтобы установить равенство двух векторов необходимо проверить: первое, являются ли они коллинеарными, второе, сонаправлены они или противоположно направлены, третье, равны ли их модули.

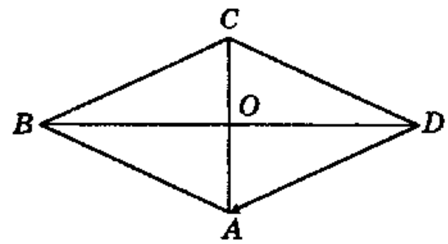
Все векторы во всех парах по модулю равны, поскольку являются сторонами квадрата. В паре $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$ векторы противоположно направлены, в паре $\overline{BC}$ и $\overline{DA}$ векторы сонаправлены, в парах $\overline{AB}$ и $\overline{CB}$, $\overline{CD}$ и $\overline{DA}$ векторы не коллинеарны. Таким образом, условию равенства векторов соответствует только пара $\overline{CB}$ и $\overline{DA}$.

2. О т в е т: 4.



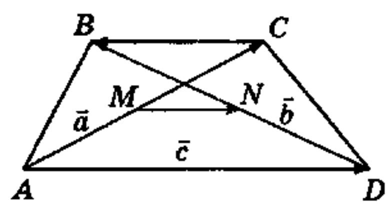
Решение. Применим правило многоугольника сложения векторов $\overline{CB} = \overline{CD} + \overline{DA} + \overline{AB}$. Векторы $\overline{AB}$, $\overline{DA}$ и $\overline{CD}$ по модулю равны векторам $\overline{BA}$, $\overline{AD}$ и $\overline{DC}$, но противоположно направлены. Значит, $\overline{CB} = -(\overline{DC} + \overline{AD} + \overline{BA}) = -(\bar{c} + \bar{b} + \bar{a})$.

3. О т в е т: 3.



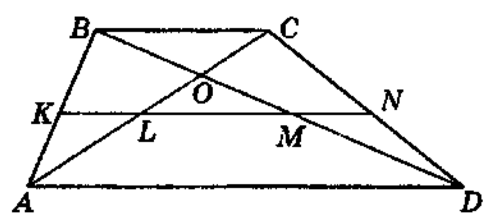
Решение. По определению длина вектора $\overline{DA}$ равна длине отрезка AD. Отрезок AD является стороной ромба $ABCD$. Из свойства диагоналей ромба следует, что треугольник AOD — прямоугольный и $AO = 5$ см, $DO = 12$ см. По теореме Пифагора $AD = \sqrt{AO^2 + OD^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ (см). Следовательно, $|\overline{DA}| = 13$ см.

4. О т в е т: 3.



Решение. По правилу многоугольника сложения векторов $\overline{AD} = \overline{AM} + \overline{MN} + \overline{ND}$. Так как точки M и N — середины диагоналей AC и BD, то $\overline{AM} = \frac{1}{2}\bar{a}$ и $\overline{DN} = \frac{1}{2}\bar{b}$. Вектор ND по модулю равен вектору $\overline{DN}$, но противоположно направлен. Значит, $\overline{ND} = -\frac{1}{2}\bar{b}$.. Отсюда, $\overline{MN} = \overline{AD} - (\overline{AM} + \overline{ND}) = \overline{AD} - \overline{AM} - \overline{ND} = \bar{c} - \frac{1}{2}\bar{a} + \frac{1}{2}\bar{b}$.

5. О т в е т: 4.



Решение. По теореме Фалеса точка M — середина BD. В треугольнике ABD отрезок KM является средней линией и $KM = \frac{1}{2}AD$. Отрезки KL и LM лежат на одной прямой, значит, $KM = KL + LM = 14$ (см), поэтому, $AD = 2KM = 28$ (см).

Часть 2

6. О т в е т: $-3\bar{a}$.

Решение. По условию $|\overline{CD}| = 3|\bar{a}|$ и векторы $\bar{a}$ и $\overline{CD}$ противоположно направлены, следовательно, $\overline{CD} = -3\bar{a}$.

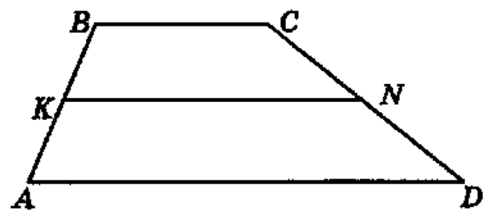
7. О т в е т: 0.

Решение. В силу переместительного закона $\overline{MB} + \overline{AM} + \overline{BA} = \overline{AM} + \overline{MB} + \overline{BA} = \overline{AB} + \overline{BA}$. Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$ равны по модулю, но противоположно направлены, значит $\overline{AB} + \overline{BA} = 0$.

8. Ответ: 0.

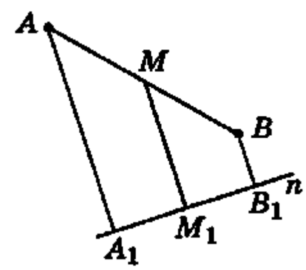
Решение. Пусть $\bar{b} = x\bar{a}$. Поскольку $|\bar{a}| = 1$, $|\bar{b}| = 2$ и векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ сонаправленны, то $x = 2$, т. е. $\bar{b} = 2\bar{a}$. По условию $2\bar{a} + 0{,}5\bar{b} - \bar{c} = 0$, значит, $\bar{c} = 2\bar{a} + 0{,}5\bar{b} = 3\bar{a}$. Следовательно, $|\bar{c}| = 3$.

9. Ответ: 12.



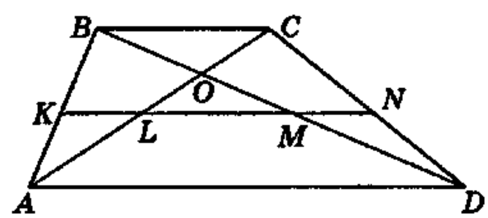
Решение. По теореме о средней линии трапеции $KN = \frac{AD + BC}{2}$, а по условию $AD = 1{,}5\ BC$, откуда $AD + BC = 2{,}5BC$ и $2KN = 2{,}5BC$, $20 = 2{,}5BC$, $BC = 8$ (см), $AD = 12$ (см).

10. Ответ: 6.



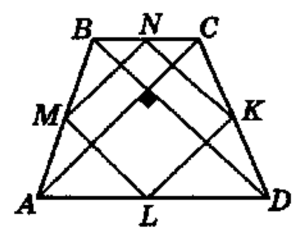
Решение. Точка M — середина отрезка AB. По определению расстояния от точки до прямой отрезки AA_1, BB_1 и MM_1 перпендикулярны прямой n. Следовательно, четырехугольник $ABCD$ — трапеция, основания AA_1 и BB_1 которой равны соответственно 9 см и 3 см. По теореме Фалеса точка M_1 — середина отрезка A_1B_1, следовательно, отрезок MM_1 — средняя линия трапеции. По теореме о средней линии трапеции $MM_1 = \frac{AA_1 + BB_1}{2} = \frac{9 + 3}{2} = 6$ (см).

11. Ответ: 1 : 2.



Решение. По теореме Фалеса точки L и M — середины отрезков AC и BD. По условию $KL = LM = MN$, значит, $LN = 2\ KL$ и $KL : LN = 1 : 2$. В треугольнике ABC отрезок KL является средней линией и $KL = \frac{1}{2}BC$. Аналогично, в треугольнике ACD отрезок LN является средней линией и $LN = \frac{1}{2}AD$. Следовательно, $KL : LN = \frac{1}{2}BC : \frac{1}{2}AD = BC : AD = 1 : 2$.

12. Ответ: квадрат.



Решение. Стороны четырехугольника $KLMN$ являются средними линиями треугольников, основания которых — диагонали трапеции. Так как диагонали трапеции $ABCD$ перпендикулярны, то все углы четырехугольника $KLMN$ — прямые, следовательно, он является прямоугольником. Так как трапеция $ABCD$ — равнобедренная, то ее диагонали равны. Значит, соседние стороны четырехугольника $KLMN$ также равны. Следовательно, четырехугольник $KLMN$ является квадратом.

Часть 3

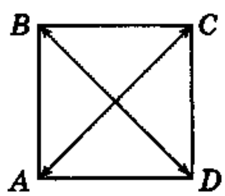
13. Ответ: $\overline{CK} = \frac{2}{5}\overline{KA}$.

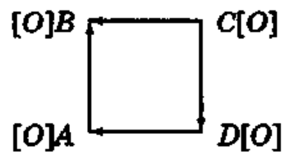
Решение. Вычтем из обеих частей вектор $\overline{OC}$, тогда $\overline{OK} - \overline{OC} = \frac{2}{7}\overline{OA} + \frac{5}{7}\overline{OC} - \overline{OC} = \frac{2}{7}\overline{OA} - \frac{2}{7}\overline{OC}$, т. е. $\overline{CK} = \frac{2}{7}\overline{CA}$. Отсюда следует, что эти векторы коллинеарны, т. е. точка K лежит на отрезке CA и делит его в отношении $2:5$; $\overline{CK} = \frac{2}{5}\overline{KA}$.

14. Решение. От одной точки нужно отложить векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ и провести вектор из конца вектора $\vec{y}$ в начало вектора $\vec{x}$, получим вектор $\vec{x} - \vec{y}$. Получим треугольник со сторонами $|\vec{x}|$, $|\vec{y}|$ и $|\vec{x} - \vec{y}|$ в силу теоремы о неравенстве треугольника $|\vec{x} - \vec{y}| \leqslant |\vec{x}| + |\vec{y}|$.

При этом, если векторы не коллинеарны, то выполняется строгое неравенство $|\vec{x} - \vec{y}| < |\vec{x}| + |\vec{y}|$, если векторы коллинеарны, то $|\vec{x} - \vec{y}| = |\vec{x}| + |\vec{y}|$.

15. Решение. От произвольной точки плоскости отложим вектор $\overline{OA}$. От точки $A[O]$ отложим вектор, равный $\overline{OB}$. Затем отложим векторы, соответственно равные $\overline{OC}$ и $\overline{OD}$. Так как диагонали квадрата пересекаются под прямым углом, то у полученного четырехугольника все





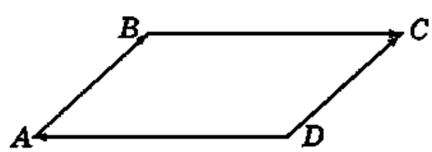
углы прямые, Значит, полученный четырехугольник — прямоугольник, а так как диагонали квадрата равны и точкой пересечения делятся пополам, то и стороны прямоугольника равны. Следовательно, полученный прямоугольник — квадрат. По правилу многоугольника сложения векторов $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = 0$.

Вариант 2

Часть 1

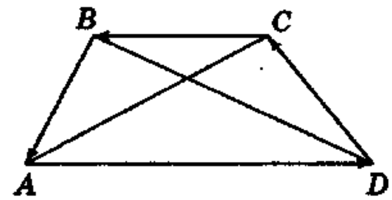
1. Ответ: 1.

Решение. Чтобы установить равенство двух векторов необходимо проверить: первое, являются ли они коллинеарными, второе, сонаправлены они или противоположно направлены, третье, равны ли их модули.



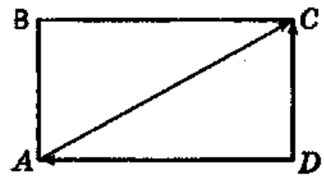
Векторы, лежащие на сторонах AB и DC, равны по модулю, аналогично векторы, лежащие на сторонах BC и AD, равны по модулю поскольку противоположные стороны параллелограмма равны. В паре $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$ векторы сонаправлены, в паре $\overline{BC}$ и $\overline{DA}$ векторы противоположно направлены, в парах $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$, $\overline{DC}$ и $\overline{DA}$ векторы не коллинеарны. Таким образом, условию равенства векторов соответствует только пара $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$.

2. Ответ: 4.



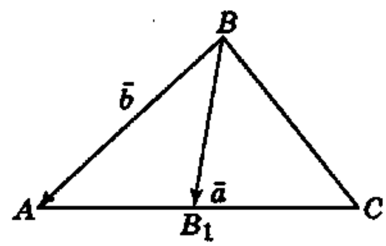
<u>**Решение**</u>. По правилу треугольника сложения векторов $\overline{BD} = \overline{BA} + \overline{AD} = \bar{a} + \bar{b}$. С другой стороны $\overline{BD} = -(\overline{DC} + \overline{CB})$. Значит, $\overline{DC} = -(\overline{BD} + \overline{CB}) = -(\bar{a} + \bar{b}) - \bar{c} = -(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})$.

3. Ответ: 2.



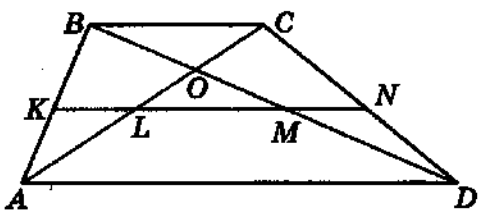
<u>**Решение**</u>. По определению длина вектора $\overline{AC}$ равна длине отрезка AC. Отрезок AC в прямоугольнике $ABCD$ является диагональю. Так как четырехугольник $ABCD$ — прямоугольник, то треугольник ABD — прямоугольный. По теореме Пифагора $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$ (см). Следовательно, $|\overline{AC}| = 17$ см.

4. Ответ: 3.



<u>**Решение**</u>. По определению разности векторов $\overline{BB_1} = \overline{BA} - \overline{B_1A}$. Так как отрезок BB_1 — медиана треугольника ABC, то $\overline{B_1A} = \frac{1}{2}\overline{CA} = \frac{1}{2}\bar{a}$. Следовательно, $\overline{BB_1} = \bar{b} - \frac{1}{2}\bar{a}$.

5. Ответ: 2.



<u>**Решение**</u>. По теореме Фалеса точки L и M — середины отрезков AC и BD. В треугольнике ABC отрезок KL является средней линией и $KL = \frac{1}{2}BC = 7{,}5$ (см). Аналогично, в треугольнике ABD отрезок KM является средней линией и $KM = \frac{1}{2}AD = 11{,}5$ (см). Отрезки KL и LM лежат на одной прямой, значит, $LM = KM - KL = 4$ (см).

Часть 2

6. Ответ: $-\frac{1}{2}\overline{m}$.

<u>**Решение**</u>. По условию $|\overline{MN}| = \frac{1}{2}|\overline{m}|$ и векторы $\overline{MN}$ и $\overline{m}$ противоположно направлены, следовательно, $\overline{MN} = -\frac{1}{2}\overline{m}$.

7. Ответ: $\overline{AB}$.

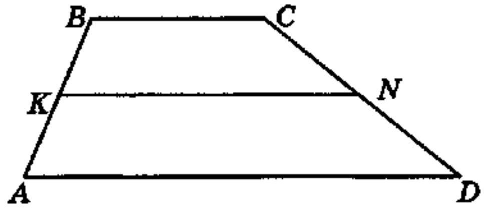
<u>**Решение**</u>. В силу переместительного закона $\overline{AK} - \overline{BC} + \overline{KC} = \overline{AK} + \overline{KC} - \overline{BC} = \overline{AC} - \overline{BC} = \overline{AB}$.

8. Ответ: 14.

Решение. Пусть $\bar{c} = x\bar{a}$. Поскольку $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{c}| = 4$ и векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ сонаправленны, то $x = 2$, т. е. $\bar{c} = 2\bar{a}$. По условию $3\bar{a} - \bar{b} + 2\bar{c} = 0$, значит, $\bar{b} = 3\bar{a} + 2\bar{c} = 7\bar{a}$. Следовательно, $|\bar{b}| = 14$.

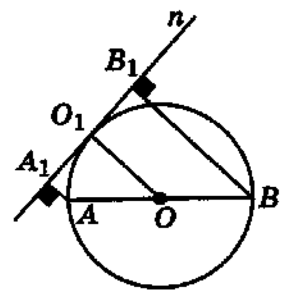
9. Ответ: 7.

Решение. Пусть для определенности $BC = 5$ см. По теореме о средней линии трапеции $KN = \frac{AD + BC}{2}$, откуда $AD = 2KN - BC = 12 - 5 = 7$ (см).



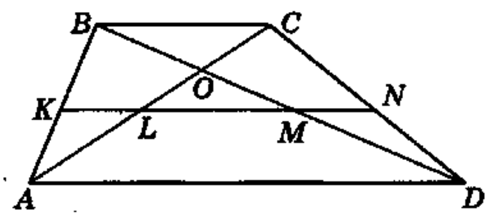
10. Ответ: 5.

Решение. По определению расстояния от точки до прямой отрезки AA_1, BB_1 и OO_1 перпендикулярны прямой n, значит, $AA \parallel BB_1 \parallel OO_1$. Следовательно, четырехугольник $ABCD$ — трапеция, основания AA_1 и BB_1 которой равны соответственно 9 см и 1 см. Точка O — центр окружности, значит, делит диаметр пополам. По теореме Фалеса точка O_1 — середина отрезка A_1B_1, следовательно, отрезок OO_1 — средняя линия трапеции. По теореме о средней линии трапеции $OO_1 = \frac{AA_1 + BB_1}{2} = \frac{9+1}{2} = 5$ (см).



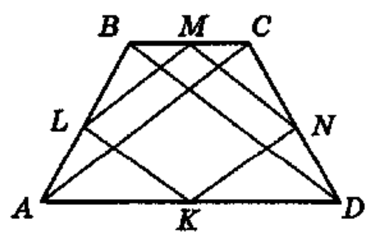
11. Ответ: 2.

Решение. По теореме Фалеса точки L и M — середины отрезков AC и BD. В треугольнике ABC отрезок KL является средней линией и $KL = \frac{1}{2}BC$. Аналогично, в треугольнике ACD отрезок LN является средней линией и $LN = \frac{1}{2}AD$. По условию $BC : AD = 3 : 4$. Следовательно, $KL : LN = \frac{1}{2}BC : \frac{1}{2}AD = BC : AD = 3 : 4$.



12. Ответ: ромб.

Решение. По условию точка M является серединой стороны BC, значит, по теореме Фалеса точка L является серединой стороны AB. Аналогично доказывается, что точка N — середина стороны CD. Следовательно, вершины четырехугольника $KLMN$ являются серединами сторон трапеции $ABCD$. Стороны четырехугольника $KLMN$ являются средними линиями треугольников, основания которых — диагонали трапеции. Следовательно, у четырехугольника $KLMN$ сто-



роны MN и KL параллельны, так как они параллельны диагонали BD и равны $\frac{1}{2}BD$ по теореме о средней линии треугольника. Значит, четырехугольник $KLMN$ — параллелограмм. Так как трапеция $ABCD$ — равнобедренная, то ее диагонали AC и BD равны. Значит, стороны LM и MN параллелограмма $KLMN$ также равны. Следовательно, параллелограмм $KLMN$ является ромбом.

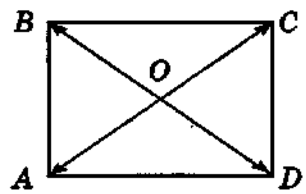
Часть 3

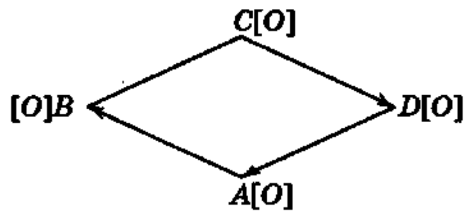
13. Решение. Вычтем из обеих частей вектор $\overline{OA}$, тогда $\overline{OK} - \overline{OA} = \frac{3}{5}\overline{OA} + \frac{2}{5}\overline{OC} - \overline{OA} = \frac{2}{5}\overline{OC} - \frac{2}{5}\overline{OA}$, т. е. $\overline{AK} = \frac{2}{5}\overline{AC}$. Отсюда следует, что векторы $\overline{AK}$ и $\overline{AC}$ коллинеарны, т. е. точка K лежит на отрезке AC и делит его в отношении 2 : 3. Следовательно, $\overline{AK} = \frac{2}{3}\overline{KC}$.

14. Решение. Нужно от конца вектора $\vec{x}$ отложить вектор $\vec{y}$ и провести вектор из начала вектора $\vec{x}$ в конец вектора $\vec{y}$, получим вектор $\vec{x} + \vec{y}$. Получим треугольник со сторонами $|\vec{x}|$, $|\vec{y}|$ и $|\vec{x} + \vec{y}|$ в силу теоремы о неравенстве треугольника $|\vec{x} + \vec{y}| \leqslant |\vec{x}| + |\vec{y}|$.

При этом, если векторы не коллинеарны, то выполняется строгое неравенство $|\vec{x} - \vec{y}| < |\vec{x}| + |\vec{y}|$, если векторы коллинеарны, то $|\vec{x} - \vec{y}| = |\vec{x}| + |\vec{y}|$.

15. Решение. От произвольной точки плоскости отложим вектор $\overline{OA}$. От точки $A[O]$ отложим вектор, равный $\overline{OB}$. Затем отложим векторы, соответственно равные $\overline{OC}$ и $\overline{OD}$.





Векторы $\overline{OA}$ и $\overline{OC}$ лежат на диагонали AC, а векторы $\overline{OB}$ и $\overline{OD}$ лежат на диагонали BD, следовательно, они попарно коллинеарны. Отсюда следует, что у полученного четырехугольника стороны попарно параллельны. Значит, полученный четырехугольник — параллелограмм. Так как диагонали прямоугольника равны и точкой пересечения делятся пополам, то стороны полученного параллелограмма равны. Следовательно, полученный параллелограмм — ромб. По правилу многоугольника сложения векторов $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = 0$.

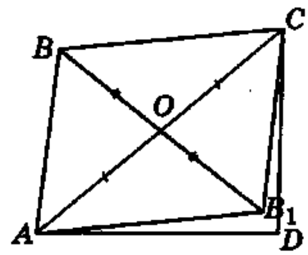
Учебник «Геометрия. 7–9» А.В. Погорелова

ТЕСТ 1

Вариант 1

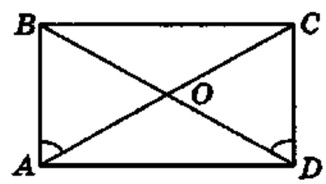
Часть 1

1. Ответ: 2.



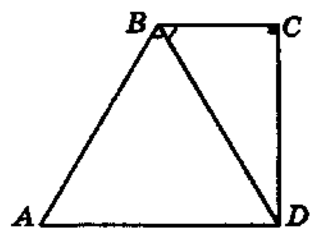
Решение. Соединим точку B с точкой O и отложим на прямой BO от точки O отрезок OB_1, равный отрезку BO. Тогда треугольники AOB и COB_1 равны по двум сторонам ($AO = CO$ по условию и $BO = B_1O$ по построению) и углу между ними ($\angle AOB = \angle COB_1$). Отсюда $AB = CB_1$. Аналогично доказывается, что $BC = AB_1$, следовательно, $ABCB_1$ — параллелограмм. Значит, по свойству параллелограмма $\angle ABC = \angle AB_1C$, а по условию $\angle ABC = \angle ADC$, отсюда, $\angle AB_1C = \angle ADC$. Значит, точки B_1 и D совпадают и $ABCD$ — параллелограмм. По свойству сторон параллелограмма $AD = BC = 7$ см.

2. Ответ: 3.



Решение. Так как $ABCD$ — параллелограмм, то углы ABD и CDB равны как накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD и секущей BD, а углы BAC и CDB равны по условию, следовательно, углы ABD и BAC равны. Значит, треугольник ABO — равнобедренный и $AO = BO$, отсюда, диагонали AC и CB равны, следовательно, параллелограмм $ABCD$ — прямоугольник, а так как AB и AD равны, то квадрат.

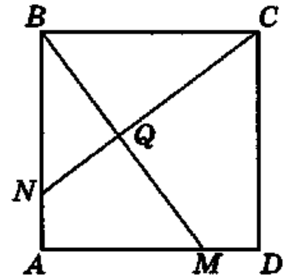
3. Ответ: 2 и 1.



Решение. По условию $\angle ABC = 120°$ и диагональ BD трапеции $ABCD$ является биссектрисой угла ABC, в треугольнике ABD $\angle ABD = \angle CBD = 60°$. Так как трапеция $ABCD$ — прямоугольная, то в прямоугольном треугольнике BCD $\angle CDB + \angle CBD = 90°$, $\angle CDB = 90° - \angle CBD = 30°$. Значит, $\angle ADB = \angle CDA - \angle CDB = 90° - 30° = 60°$.

В треугольнике ABD $\angle ABD = 60°$, $\angle ADB = 60°$, а по теореме о сумме углов треугольника $\angle BAD = 60°$. Следовательно, треугольник ABD — равносторонний и остроугольный.

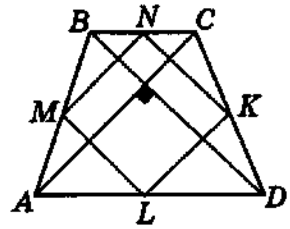
4. Ответ: 1.



Решение. По условию четырехугольник $ABCD$ — квадрат, значит, $AB = AD = BC$. Так как $AN : NB = DM : MA = 1 : 2$, то $NB = MA$. Значит, в прямоугольных треугольниках ABM и BCN катеты равны, отсюда $\Delta ABM = \Delta BCN$. Из равенства треугольников следует, что $\angle BNC = \angle AMB$. Значит, в треугольнике BQN $\angle ABM + \angle BNC = 90°$. Следовательно, $\angle BQN$ — прямой и прямые NC и BM перпендикулярны.

5. Ответ: 3.

Решение. Стороны четырехугольника $KLMN$ являются средними линиями треугольников, основания которых — диагонали трапеции. Значит, диагонали четырехугольника $KLMN$ попарно параллельны. Стороны KL и MN параллельны диагонали AC,

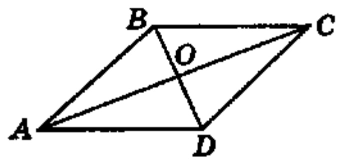


а стороны LM и KN параллельны диагонали BD. Следовательно, четырехугольник $KLMN$ — параллелограмм. Так как диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ перпендикулярны, то все углы параллелограмма $KLMN$ — прямые.

Следовательно, параллелограмм $KLMN$ — прямоугольник. Так как трапеция $ABCD$ — равнобедренная, то ее диагонали AC и BD равны. Значит, стороны прямоугольника $KLMN$ также равны. Следовательно, прямоугольник $KLMN$ является квадратом.

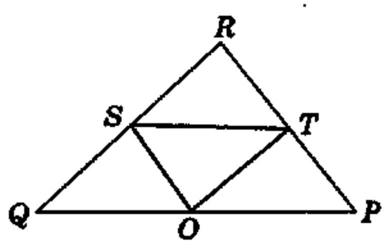
Часть 2

6. Ответ: 26.



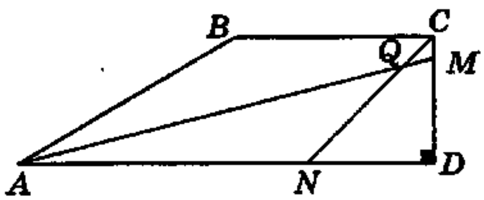
<u>Решение</u>. По свойству сторон параллелограмма $AB = CD$. Периметр треугольника BCD равен $BC + CD + BD = 23$ см, отсюда $BC + CD = BC + AB = 23 - BD = 23 - 8 = 15$ (см), $P_{ABC} = AB + BC + AC = 15 + 11 = 26$ (см).

7. Ответ: 9.



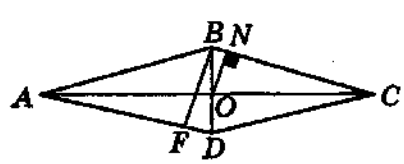
<u>Решение</u>. По теореме о средней линии треугольника в треугольнике RPQ $SO = \frac{1}{2}RP$, $ST = \frac{1}{2}PQ$ и $OT = \frac{1}{2}RQ$. Периметр треугольника SOT равен $SO + ST + OT = \frac{1}{2}RP + \frac{1}{2}PQ + \frac{1}{2}RQ = \frac{1}{2}(RP + PQ + RQ) = \frac{1}{2} \cdot 18 = 9$ (см).

8. Ответ: 30.



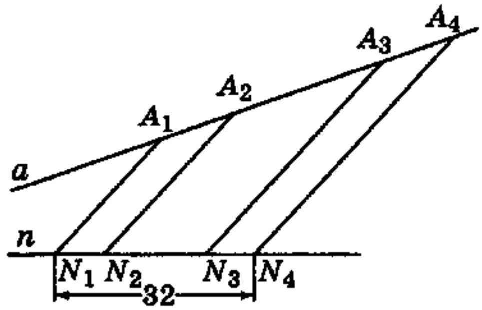
<u>Решение</u>. В трапеции $ABCD$ по условию сторона CD перпендикулярна сторонам AD и BC, значит, $\angle BCD$ — прямой. Отрезок CN — биссектриса прямого угла BCD, отсюда $\angle BCN = \angle NCD = 45°$. Углы BCN и CND — накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей CN, значит, $\angle BCN = \angle CND = 45°$. Отрезок AM — биссектриса угла BAD, отсюда $\angle MAN = \angle BAM = 15°$. В треугольнике AQN: $\angle QAN = 15°$, $\angle ANQ = 180° - 45° = 135°$ (углы CND и ANQ — смежные). По теореме о сумме углов треугольника $\angle AQN = 180° - \angle QAN - \angle ANQ = 180° - 15° - 135° = 30°$.

9. Ответ: 48.



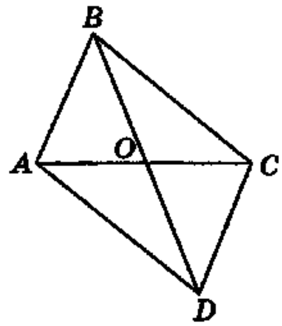
<u>Решение</u>. По условию расстояние ON равно 3 см, значит, расстояние между противолежащими сторонами ромба равно 6 см. Проведем высоту BF ромба. В прямоугольном треугольнике AFB угол BAF равен $30°$. По свойству прямоугольного треугольника, один угол которого равен $30°$, $AB = 2BF = 12$ (см). Следовательно, $P_{ABCD} = 4AB = 48$ (см).

10. Ответ: 24.



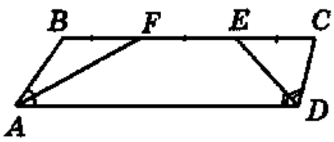
Решение. По теореме Фалеса, если параллельные прямые A_1N_1, A_2N_2, A_3N_3 и A_4N_4, пересекающие прямые a и n, отсекают на прямой a отрезки A_1A_2, A_2A_3 и A_3A_4 так, что $A_1A_2 : A_2A_3 : A_3A_4 = 1 : 2 : 1$, то на прямой n они отсекают отрезки N_1N_2, N_2N_3 и N_3N_4 так, что $N_1N_2 : N_2N_3 : N_3N_4 = 1 : 2 : 1$. Отрезок $N_1N_3 :$ $: N_1N_4 = 3 : 4$ и равен 24 (см).

11. Ответ: 72.



Решение. По условию диагональ BD вдвое больше стороны AB, значит, $BO = AB$, т. е. треугольник BOA — равнобедренный. Значит, $\angle BOA = \angle BAO$, отсюда, $\angle BOA$ — острый и равен $180° - 112° = 68°$. Угол CAD равен $40°$, следовательно, $\angle BAD = \angle BAO +$ $+ \angle CAD = 68° + 40° = 108°$, по свойству углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, $\angle CDA =$ $= 180° - \angle BAD = 180° - 108° = 72°$.

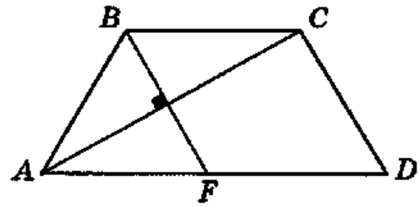
12. Ответ: 11.



Решение. Так как DE — биссектриса $\angle CDA$, то $\angle CDE = \angle ADE$; $\angle ADE = \angle CED$ как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей DE, следовательно, $\angle CDE = \angle CED$ и треугольник ECD — равнобедренный. Отсюда $EC = CD$. Аналогично доказывается, что треугольник ABF — равнобедренный, значит, $AB = BF$. Так как по условию отрезки BF, FE и EC равны, то $BC = BF + FE + FC = 3AB$, т. е. сторона AB меньшая. По свойству сторон параллелограмма $AD = BC$ и $AB = CD$, следовательно, $P_{ABCD} = AB + BC +$ $+ CD + AD = AB + 3AB + AB + 3AB = 8AB = 88$ (см), а значит, $AB = 11$ (см).

Часть 3

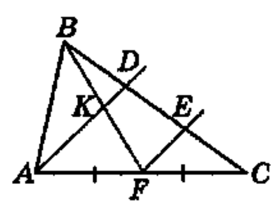
13. Ответ: 120.



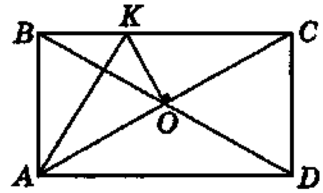
Решение. Трапеция $ABCD$ — равнобедренная, по условию стороны AB и CD равны. Так как отрезок BF — биссектриса тупого угла ABC перпендикулярна диагонали AC, то треугольник ABC — равнобедренный. Отсюда $AB = BC = CD$.

Следовательно, параллелограмм $BCDF$ — ромб, значит, $CD = BF$ и $\angle CDF = \angle FBC$. Углы AFB и FBC равны так как AC — биссектриса $\angle ABF$. Отсюда $AB =$ $= AF$, $AB = CD = BF$, значит, треугольник ABF — равносторонний и $\angle FBC = \angle AFB = 60°$. Следовательно, $\angle CDF = \angle FBC = 60°$, отсюда $\angle BCD = 120°$.

14. Решение. Через точку F проведем прямую, параллельную AD. Она пересекает сторону BC в точке E. Тогда, по теореме Фалеса, параллельные прямые AD и FE, пересекающие стороны угла FBC, отсекают на стороне BC равные отрезки BK и KF. Следовательно, точка K является серединой медианы BF.



15. Ответ: 60.

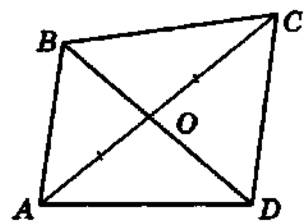


Решение. Так как отрезок OK является перпендикуляром к диагонали AC и проходит через ее середину, то треугольник AKC — равнобедренный, $AK = KC$. Тогда в прямоугольном треугольнике ABK гипотенуза AK в два раза больше катета BK. Значит, $\angle BAK = 30°$, а $\angle AKB = 60°$. Отсюда $\angle AKC = 120°$. По свойству равнобедренного треугольника отрезок OK является биссектрисой в треугольнике AKC, значит $\angle OKC = 60°$, а $\angle BCA = 30°$. Таким образом $\angle ACD = 60°$.

Вариант 2

Часть 1

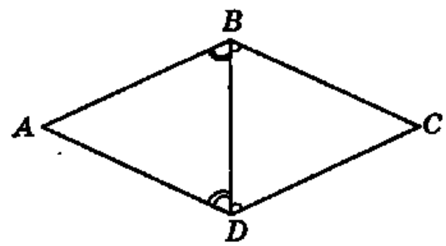
1. Ответ: 2.



Решение. По условию стороны AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ параллельны, значит, углы OAB и OCD равны как накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD и секущей AC, а углы BOA и DOC равны как вертикальные, $OA = OC$, следовательно, треугольники AOB и COD равны по стороне и прилежащим к ней углам. Значит, $AB = CD$, следовательно, по признаку параллелограмма четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

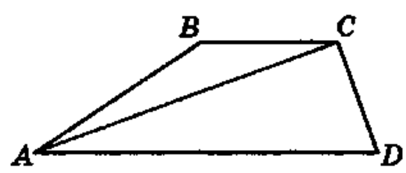
По свойству сторон параллелограмма стороны AD и BC параллелограмма $ABCD$ равны, $AD = BC = 7$ см.

2. Ответ: 2.



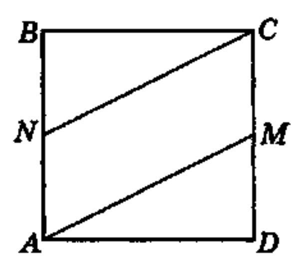
Решение. По свойству углов параллелограмма углы ABC и ADC параллелограмма $ABCD$ равны. По условию диагональ BD параллелограмма $ABCD$ делит тупой угол ABC пополам. Углы BCD и DBA равны как накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD и секущей BD. Значит, треугольник ABD — равнобедренный и $AB = BC$. Следовательно, параллелограмм $ABCD$ — ромб.

3. Ответ: 1 и 2.



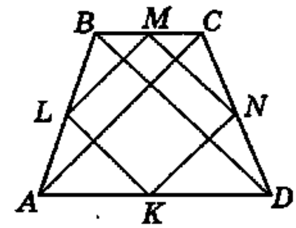
Решение. По условию $\angle CAD = 20°$. Угол BCA образует с углом CAD пару внутренних накрест лежащих углов при прямых AD и BC и секущей AC, значит, в треугольнике ACD: $\angle ACD = \angle BCD - \angle BCA = 110° - 20° = 90°$. Таким образом, в треугольнике ACD: $\angle ACD = 90°$, $\angle CAD = 20°$, тогда $\angle ADC = 70°$, следовательно, треугольник ACD — прямоугольный и разносторонний.

4. Ответ: 3.



Решение. По условию четырехугольник $ABCD$ — квадрат, значит, $AB \parallel CD$. По условию точки N и M — середины сторон AB и CD, тогда $AN = CM$. Значит, в четырехугольнике $ANCM$ стороны AN и CM равны и параллельны, Следовательно, четырехугольник $ANCM$ — параллелограмм. Из определения параллелограмма следует, что прямые NC и AM параллельны.

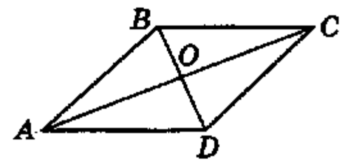
5. Ответ: 2.



Решение. По условию точка M является серединой стороны BC, значит, по теореме Фалеса точка L является серединой стороны AB. Аналогично доказывается, что точка N — середина стороны CD. Следовательно, вершины четырехугольника $KLMN$ являются серединами сторон трапеции $ABCD$. Стороны четырехугольника $KLMN$ являются средними линиями треугольников, основания которых — диагонали трапеции. Следовательно, у четырехугольника $KLMN$ стороны MN и KL параллельны, так как они параллельны диагонали BD и равны $\frac{1}{2}BD$ по теореме о средней линии треугольника. Значит, четырехугольник $KLMN$ — параллелограмм. Так как трапеция $ABCD$ — равнобедренная, то ее диагонали AC и BD равны. Значит, стороны LM и MN параллелограмма $KLMN$ также равны. Следовательно, параллелограмм $KLMN$ является ромбом.

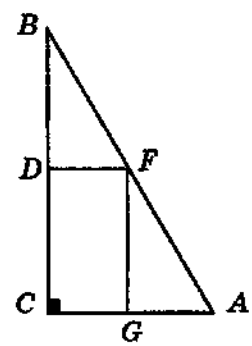
Часть 2

6. Ответ: 25.



Решение. По свойству сторон параллелограмма $AB = CD$ и $BC = AD$. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 32 см, отсюда $BC + CD = 16$ см. Периметр треугольника ABD равен $BC + CD + BD = 16 + 9 = 25$ (см).

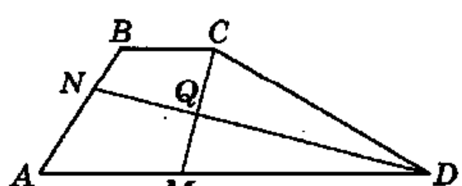
7. Ответ: 34.



Решение. По условию четырехугольник $CDFG$ — прямоугольник, значит $DF \parallel CG$, тогда по теореме Фалеса, так как точка F — середина гипотенузы AB, то точка D — середина катета BC. По определению средней линии треугольника отрезок DF — средняя линия треугольника ABC. Аналогично доказывается, что FG — также средняя линия треугольника ABC. Следовательно, $DF = \frac{1}{2}AC$ и $FG = \frac{1}{2}BC$. Периметр прямоугольника $CDFG$ равен $DF + FG + CG + CD = \frac{1}{2}AC + {}$

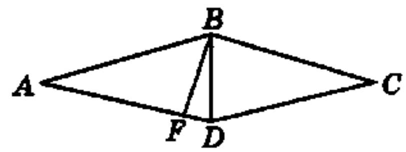
$+ \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}BC = AC + BC = 10 + 24 = 34$ (см).

8. Ответ: 90.



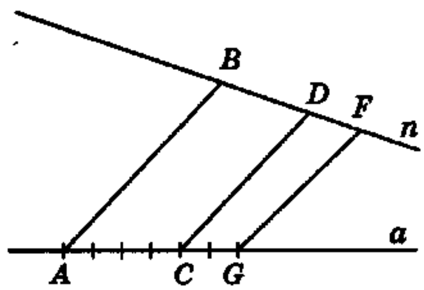
Решение. Так как основания BC и AD трапеции $ABCD$ параллельны, то по свойству односторонних углов при параллельных прямых BC и AD и секущей DC: $\angle BCD + \angle ADC = 180°$. Так как отрезки CM и DN — биссектрисы углов BCD и CDA, то в треугольнике CQD $\angle QCD + \angle ADQ = 90°$. Таким образом, по теореме о сумме углов треугольника $\angle CQD = 90°$.

9. О т в е т: 2,5.



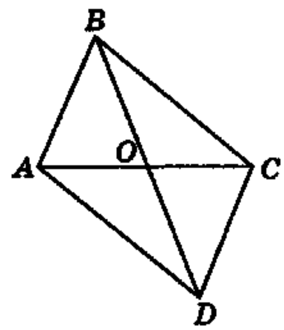
<u>Решение</u>. По условию $\angle ADB = 75°$, значит, $\angle ADC = 150°$, по свойству диагоналей ромба: диагональ ромба является биссектрисой его углов. Отсюда $\angle BAD = 30°$. В треугольнике ABF отрезок BF высота, значит, треугольник ABF — прямоугольный и $\angle BAD = 30°$, следовательно, по свойству прямоугольного треугольника, один угол которого равен $30°$, $BF = \frac{1}{2}AB = 2{,}5$ (см).

10. О т в е т: 8.



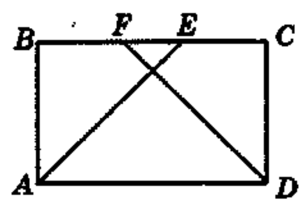
<u>Решение</u>. По теореме Фалеса, если параллельные прямые AB, CD и GF, пересекающие прямые a и n, отсекают на прямой n отрезки BD и DF такие, что BD в два раза больше DF ($DF = 5$ см; $BD = 10$ см), то на прямой a они отсекают отрезки AC и CG такие, что AC в два раза больше CG. Следовательно, $AC = 2CG = 8$ (см).

11. О т в е т: 44.



<u>Решение</u>. По условию диагональ BD вдвое больше стороны AB, значит, $BO = AB$, т. е. треугольник BOA — равнобедренный и по свойству углов равнобедренного треугольника $\angle BOA = \angle BAO$, отсюда, $\angle BOA$ — острый и равен $180° - 112° = 68°$. По условию угол CDA равен $72°$, следовательно, по свойству углов, прилежащих к одной стороне параллелограмма, $\angle BAD = 180° - 72° = 112°$, $\angle BAD = \angle BAO + \angle CAD$, отсюда $\angle CAD = \angle BAD - \angle BAO = 112° - 68° = 44°$.

12. О т в е т: 3.

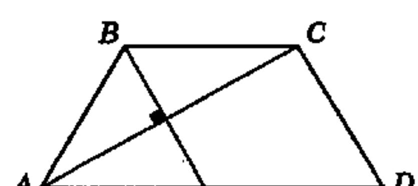


<u>Решение</u>. Так как DF — биссектриса $\angle CDA$, то $\angle CDF = \angle ADF$ и $\angle ADF = \angle CFD$ как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей DF, следовательно, $\angle CDF = \angle CFD$ и треугольник CFD — равнобедренный. Отсюда $CF = CD = 5$ (см), а отрезок EC равен 2 (см). Аналогично доказывается, что треугольник ABE — равнобедренный, значит, $AB = BE = 5$ (см), а отрезок BF равен 2 (см).

Так как, по условию точки F и E делят сторону BC на три отрезка: BF, FE и EC то $BC = = BF + FE + FC$, отсюда $FE = BC - BF - EC = 7 — 2 — 2 = 3$ (см).

Часть 3

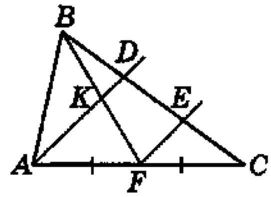
13. О т в е т: 6.



<u>Решение</u>. Трапеция $ABCD$ — равнобедренная, по условию стороны AB и CD равны. Так как отрезок BF — биссектриса тупого угла ABC перпендикулярна диагонали AC, то треугольник ABC — равнобедренный. Отсюда $AB = BC = CD$.

Следовательно, параллелограмм $BCDF$ — ромб, значит, $CD = BF$ и $\angle CDF = \angle FBC$. Углы AFB и FBC равны как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей BF. Отсюда $AB = AF$, $AB = CD = BF$, значит, треугольник ABF — равносторонний и $AD = 2BC$. Следовательно, $P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD = 3BC + 2BC = 5BC = 30$ см, $BC = 6$ см.

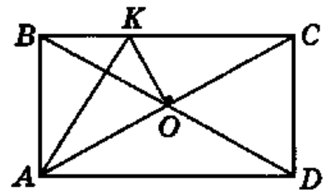
14. Решение. Через точку F проведем прямую, параллельную AD. Она пересекает сторону BC в точке E. Тогда по теореме Фалеса, если параллельные прямые AD и FE, пересекающие стороны угла ACB, отсекают на стороне AC равные отрезки AF и FC, то на стороне CB они отсекают равные отрезки CE и ED. Аналогично для угла FBC, так как $BK = KF$, то $BD = DE$.



Значит, $CE = ED = DE$. Таким образом, $BD = \frac{1}{3}BC$.

15. Ответ: 12.

Решение. Так как отрезок OK является перпендикуляром к диагонали AC и проходит через ее середину, то треугольник AKC — равнобедренный и отрезок OK является биссектрисой угла AKC. Так как в прямоугольном треугольнике OKC угол KCO равен $30°$, то $\angle OKC = 60°$, а $\angle AKC = 120°$. Следовательно, $\angle AKB = 60°$, как смежный с углом AKC. Значит, в прямоугольном треугольнике ABK угол BAK равен $30°$, а гипотенуза AK в два раза больше катета BK по свойству прямоугольного треугольника, один угол которого равен $30°$. Значит, $AK = KC = 2BK$, т. е. $BC = BK + KC = 3BK = 18$ (см), отсюда $KC = 12$ (см).



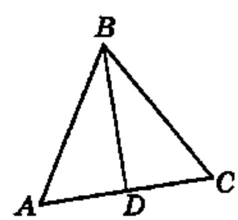
ТЕСТ 2

Вариант 1

Часть 1

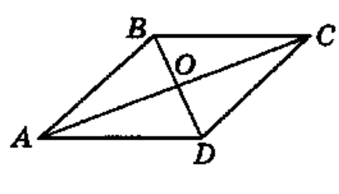
1. Ответ: 4.

Решение. В равностороннем треугольнике ABC проведем высоту AD. По свойству равнобедренного треугольника его высота является медианой треугольника ABC. Следовательно, треугольник ABD — прямоугольный, в котором $AB = 8$ см и $AD = \frac{1}{2}AC = 4$ см. По теореме Пифагора $BD^2 = AB^2 - AD^2$, $BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ (см).

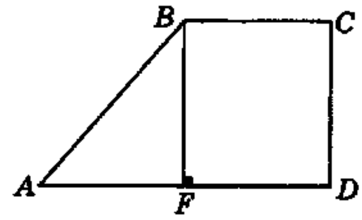


2. Ответ: 2.

Решение. В треугольнике AOB $AB = 5$ см по условию, а $AO = 4$ см и $OB = 3$ см по свойству диагоналей параллелограмма. Из соотношения сторон $AB^2 = AO^2 + OB^2$ следует, что треугольник AOB — прямоугольный. Значит, диагонали параллелограмма $ABCD$ перпендикулярны, следовательно, параллелограмм $ABCD$ — ромб.

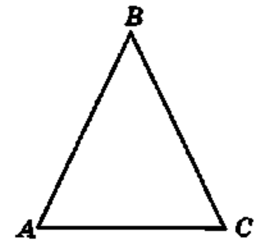


3. Ответ: 2.



Решение. Проведем в трапеции $ABCD$ высоту BF. Высота BF равна CD как расстояние между параллельными прямыми. $AF = AD - BC = 17 - 9 = 8$ (см). По условию $BF = CD = 15$ см. Так как $\triangle ABF$ — прямоугольный, то по теореме Пифагора $AB = \sqrt{BF^2 + AF^2} = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17$ (см).

4. Ответ: 3.



Решение. В равнобедренном треугольнике ABC стороны AB и BC равны. По условию периметр равен 24 см, а одна сторона равна 6 см, значит, сумма двух других сторон равна 18 см. Рассмотрим два случая.

1. Предположим, что боковая сторона AB равна 6 см, тогда $AB + BC = 12$ см и сторона AC равна 12 см. А, значит, сумма двух сторон равна третьей. Пришли в противоречие с теоремой о неравенстве треугольника.

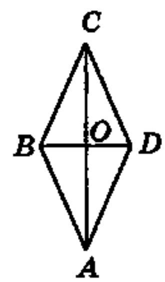
2. Предположим, что сторона AC равна 6 см, тогда $AB + BC = 18$ см, то есть $AB = BC = 9$ см. В этом случае выполняется неравенство треугольника. Значит, боковая сторона равнобедренного треугольника равна 9 см.

5. Ответ: 1.

Решение. Внешний и внутренний углы при одной вершине являются смежными углами и по теореме о смежных углах треугольника в сумме равны 180°. По условию задачи внешний и внутренний углы при вершине C равны. Значит, внутренний угол при вершине C треугольника равен 90°. Следовательно, данный треугольник — прямоугольный. По свойству перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной точки, например, из вершины A к прямой BC, наклонная AB больше перпендикуляра AC. Следовательно, в прямоугольном треугольнике ABC наибольшей стороной является гипотенуза AB.

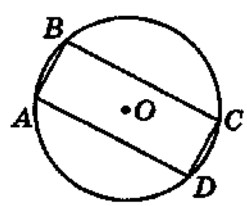
Часть 2

6. Ответ: 48.



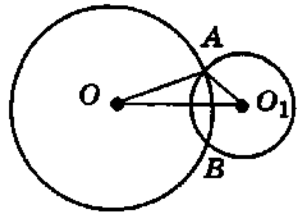
Решение. Диагонали ромба перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам, поэтому треугольник BOC — прямоугольный, в котором катет $BO = 7$ см, гипотенуза $BC = 25$ см. По теореме Пифагора $BC^2 = OC^2 + BO^2$, отсюда $OC^2 = BC^2 - BO^2 = 25^2 - 7^2$; $OC = 24$ см, значит, $AC = 48$ см.

7. Ответ: 12,5.



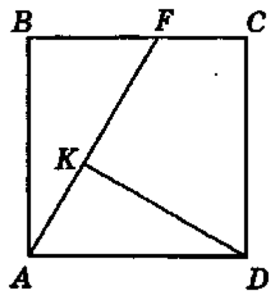
Решение. Проведем в прямоугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD, которые пересекаются в точке O. По свойству диагоналей прямоугольника AC и BD равны и точкой пересечения делятся пополам, т. е. $OA = OC = OB = OD$. Таким образом, точки A, B, C и D, так как находятся на равных расстояниях от точки O по условию, то окружность описана около прямоугольника. Значит, точка O — центр окружности, а диагонали AC и BD одновременно являются диаметрами описанной окружности. Отсюда, в прямоугольном треугольнике ABD сторона BD — гипотенуза, поэтому по теореме Пифагора: $BD^2 = AD^2 + AB^2 = 7^2 + 24^2 = 25^2$, $BD = 25$ см. Следовательно, $OB = 12,5$ см.

8. О т в е т: 15.



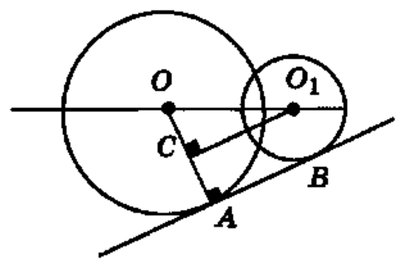
Решение. Рассмотрим треугольник OAO_1, в котором сторона $OA = 9$ см, $AO_1 = 7$ см. Из неравенства треугольника следует, что сумма длин сторон $OA + AO_1 = 9 + 7 = 16$ (см) должна быть больше длины стороны OO_1. Значит, наибольшая длина стороны OO_1 при условии, что она выражается целым числом, равна 15 см.

9. О т в е т: 1,5.



Решение. Из вершины D проведем перпендикуляр к прямой AF. По определению расстояния отрезок DK является расстоянием от вершины D до прямой AF. Так как $ABCD$ — квадрат, то $AD = AB = \sqrt{3}$. По условию $\angle FAD = 60°$, следовательно, $DK = AD \cdot \sin 60° = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1{,}5$.

10. О т в е т: 17.

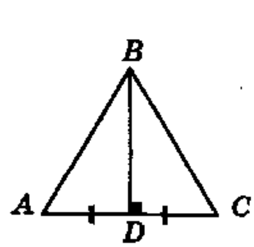


Решение. Через точку O_1 проводим прямую, параллельную прямой AB. Отрезок AO перпендикулярен прямой AB (радиус, проведенный в точку касания), значит, отрезок AO перпендикулярен и прямой, параллельной прямой AB, точку их пересечения обозначим C. К прямоугольному треугольнику OCO_1 применим теорему Пифагора. Гипотенуза — искомое расстояние OO_1, один катет равен 15 см, второй катет равен разности радиусов окружностей $12 - 4 = 8$ (см). Отсюда $OO_1 = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17$ (см).

11. О т в е т: 1.

Решение. $\sin 45° \cdot \operatorname{tg} 60° - \cos 45° \cdot \cos 30° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

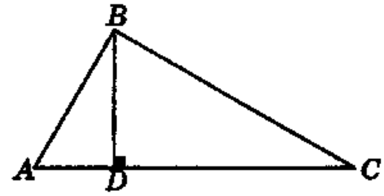
12. О т в е т: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Решение. В равнобедренном треугольнике ABC медиана BD является его высотой, значит, отрезок BD — высота и треугольник ABD — прямоугольный, у которого $AB = a$, $AD = \frac{a}{2}$. По теореме Пифагора $BD^2 = AB^2 - AD^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}a^2$, $BD = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Следовательно, $BD : AB = \frac{\sqrt{3}}{2}a : a = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

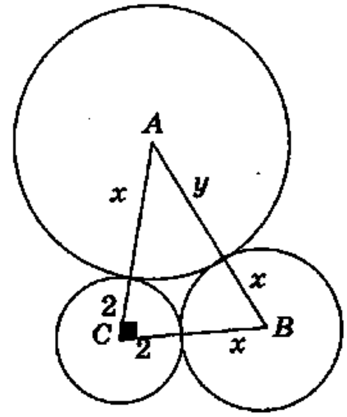
Часть 3

13. Решение. Треугольники ABD и BDC прямоугольные, так как отрезок BD — высота треугольника AB. По условию, в этих треугольниках $\angle CBD > \angle ABD$, значит, в силу теоремы о сумме углов треугольника $\angle BAD > \angle BCD$. В треугольнике против большего угла лежит большая сторона, для треугольника ABC $\angle BAD > \angle BCD$, значит, $CB > AB$.



14. Ответ: 3 и 10.

Решение. Обозначим радиус окружности с центром в точке A буквой y, а радиус окружности с центром в точке B буквой x. По условию окружности попарно касаются внешним образом и их центры являются вершинами прямоугольного треугольника ABC, значит, гипотенуза $AB = y + x = 13$, катет $AC = y + 2$ и катет $BC = x + 2$. По теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

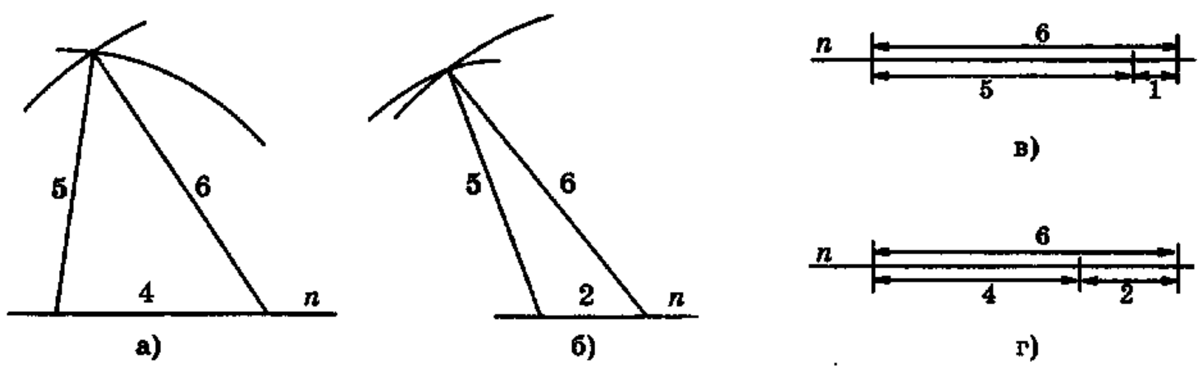


$(y + 2)^2 + (x + 2)^2 = 13^2$; $y^2 + x^2 + 4(y + x) + 8 = 169$. Подставим $y + x = 13$, и получим $y^2 + x^2 + 4 \cdot 13 + 8 = 169$, $y^2 + x^2 = 109$; возведем в квадрат $y + x = 13$: $y^2 + x^2 + 2yx = 169$, подставим сумму квадратов $109 + 2yx = 169$. Получили систему:

$\begin{cases} y + x = 10, \\ yx = 30; \end{cases}$ отсюда ответ 3 и 10.

15. Ответ: 3.

Решение. Проверим, какие тройки чисел, выражающие длины отрезков, из которых нужно составить треугольники, удовлетворяют неравенству треугольника.



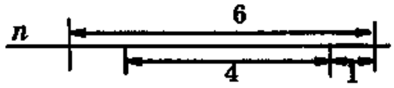
Рассмотрим все возможные случаи, когда наибольшей стороной является сторона длиной 6.

1. 6, 5 и 4; $6 < 5 + 4$, значит, такой треугольник существует. Из рисунка а) видно, что из отрезков 6, 5 и 4 можно построить треугольник.

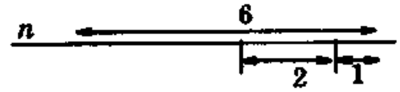
2. 6, 5 и 2; $6 < 5 + 2$, значит, такой треугольник существует. Из рисунка б) видно, что из отрезков 6, 5 и 2 можно построить треугольник.

3. 6, 5 и 1; $6 = 5 + 1$, значит, такой треугольник не существует. Из рисунка в) видно, что в этом случае отрезки длиной 5 и 1 в сумме равны отрезку длиной 6.

4. 6, 4 и 2; $6 = 4 + 2$, значит, такой треугольник не существует. Из рисунка г) видно, что в этом случае отрезки длиной 4 и 2 в сумме равны отрезку длиной 6.



д)

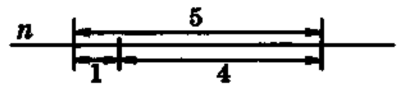


е)

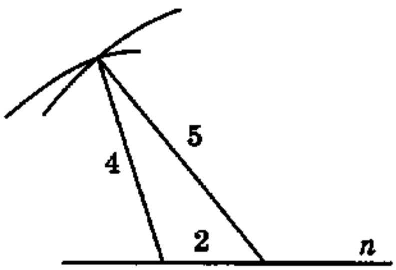
5. 6, 4 и 1; $6 > 4 + 1$, значит, такой треугольник не существует. Из рисунка д) видно, что в этом случае отрезки длиной 4 и 1 в сумме меньше отрезка длиной 6.

6. 6, 2 и 1; $6 > 2 + 1$, значит, такой треугольник не существует. Из рисунка е) видно, что в этом случае отрезки длиной 2 и 1 в сумме меньше отрезка длиной 6.

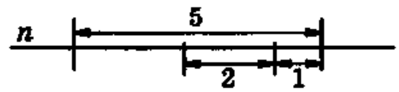
Рассмотрим теперь все возможные случаи, когда наибольшей стороной является сторона длиной 5.



з)



ж)



и)

к)

7. 5, 4 и 2; $5 < 4 + 2$, значит, такой треугольник существует. Из рисунка ж) видно, что из отрезков 5, 4 и 2 можно построить треугольник.

8. 5, 4 и 1; $5 = 4 + 1$, значит, такой треугольник не существует. Из рисунка з) видно, что в этом случае отрезки длиной 4 и 1 в сумме равны отрезку длиной 5.

9. 5, 2 и 1; $5 > 2 + 1$, значит, такой треугольник не существует. Из рисунка и) видно, что в этом случае отрезки длиной 2 и 1 в сумме меньше отрезка длиной 5.

Рассмотрим все возможные случаи, когда наибольшей стороной является сторона длиной 4.

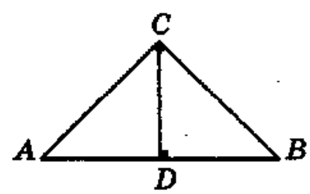
10. 4, 2 и 1; $4 = 3 + 1$, значит, такой треугольник не существует. Из рисунка к) видно, что в этом случае отрезки длиной 2 и 1 в сумме меньше отрезка длиной 4.

Таким образом, получили, что из отрезков длиной 1, 2, 4, 5 и 6 можно составить три треугольника, стороны которых равны: 6, 5 и 4; 6, 5 и 2; 6, 4 и 2.

Вариант 2

Часть 1

1. Ответ: 4.

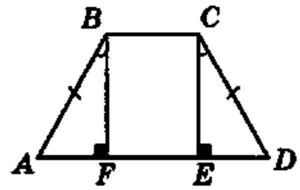


Решение. В прямоугольном равнобедренном треугольнике ABC ($\angle C$ — прямой) проведем высоту CD. По свойству равнобедренного треугольника его высота является биссектрисой треугольника ABC. Следовательно, треугольник ACD — прямоугольный, в котором $\angle CAD = 45°$ и $\angle ACD = 45°$, $AC = 8$ (см). Значит, треугольник ACD — прямоугольный и равнобедренный, тогда $BD = AD$. По теореме Пифагора $AC^2 = 2BD^2$, $BD = \sqrt{\frac{AC^2}{2}} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ (см).

2. Ответ: 1.

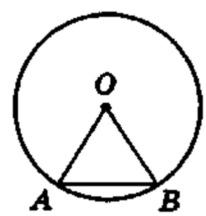
Решение. По условию в треугольнике ABC $AB = 7$ см, $BC = 24$ см и $AC = 25$ см. Из соотношения сторон $AC^2 = AB^2 + BC^2$ следует, что треугольник ABC — прямоугольный, причем сторона AC — гипотенуза. Значит, $\angle ABC$ — прямой, следовательно, параллелограмм $ABCD$ — прямоугольник.

3. Ответ: 2.



Решение. Проведем в трапеции высоты BF и CE. Прямоугольные треугольники ABF и DCE равны по гипотенузе $AB = CD$ (трапеция $ABCD$ — равнобокая) и катету $BF = CE$ (высоты в трапеции). Следовательно, $AF = DE$. Отсюда $AF = \frac{AD - BC}{2} = 8$ см. По условию $BF = 15$ см. Так как ΔABF — прямоугольный, то по теореме Пифагора $AB = \sqrt{BF^2 + AF^2} = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17$ (см).

4. Ответ: 4.



Решение. Проведем в окружности с центром в точке O хорду AB и радиусы OA и OB, значит, треугольник AOB — равнобедренный. Рассмотрим два случая.

1. Предположим, что хорда AB равна 12 см, тогда радиус OA равен 6 см, значит, сумма двух равных сторон OA и OB треугольника AOB равна третьей стороне AB. Пришли в противоречие с теоремой о неравенстве треугольника.

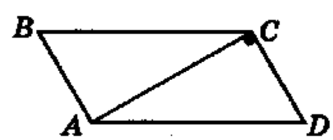
2. Предположим, что хорда AB равна 6 см, тогда радиус OA равен 12 см, значит, сумма двух равных сторон OA и OB треугольника AOB больше третьей стороны AB. В этом случае выполняется неравенство треугольника. Значит, радиус окружности равен 12 см.

5. Ответ: 3.

Решение. По теореме о сумме углов треугольника $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$. По условию $\angle A + \angle B = \angle C$, значит, $2\angle C = 180°$, $\angle C = 90°$. Следовательно, треугольник ABC — прямоугольный. По свойству перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной точки, например, из вершины A к прямой BC, наклонная AB больше перпендикуляра AC. Следовательно, в прямоугольном треугольнике ABC наибольшей стороной является гипотенуза AB.

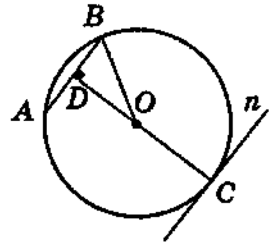
Часть 2

6. Ответ: 15.



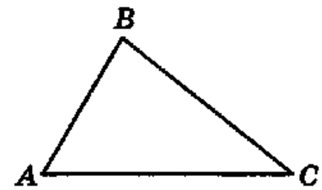
Решение. По свойству углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, так как $\angle BAD = 120°$, то $\angle ADC = 60°$. По условию $\angle CAD = 30°$. Таким образом в треугольнике ACD сумма углов ADC и CAD равна $90°$, следовательно, $\angle ACD = 90°$ и треугольник ACD — прямоугольный. По теореме Пифагора $AD^2 = AC^2 + CD^2$, отсюда $AC^2 = AD^2 - CD^2 = 17^2 - 8^2$; $AC = 15$ см.

7. О т в е т: 32.



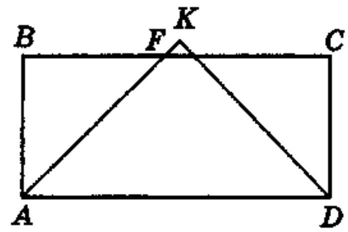
Решение. Соединим точки O и C, так как точка C — точка касания прямой n и окружности, то прямая OC перпендикулярна прямой n и, следовательно, перпендикулярна AB поскольку хорда AB и прямая n параллельны. Обозначим точку пересечения прямой OC и хорды AB буквой D. По свойству перпендикуляра, проведенного к хорде, $AD = DB$. Соединим точки O и B и рассмотрим прямоугольный треугольник ODB, в котором катет $DB = 24$ см, а гипотенуза $OB = 25$ см. По теореме Пифагора: $OB^2 = OD^2 + DB^2$, $OD^2 = OB^2 - DB^2 = 25^2 - 24^2 = 7^2$, $OD = 7$ см. Расстояние между хордой AB и параллельной ей касательной n по свойству измерения отрезков равно $DC = OD + OC = 7 + 25 = 32$ (см).

8. О т в е т: 3.



Решение. В треугольнике ABC стороны $BC = 10$ см и $AC = 12$ см. Из неравенства треугольника следует, что сумма длин сторон $BC + AB = 10 + x$ должна быть больше длины стороны AC. Значит, наименьшая длина стороны AC при условии, что она выражается целым числом, равна 3 см.

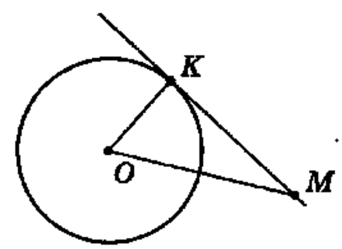
9. О т в е т: 1.



Решение. Из вершины D проведем перпендикуляр к прямой AF. По определению расстояния отрезок DK является расстоянием от вершины D до прямой AF. Так как треугольник ABF — прямоугольный ($ABCD$ — прямоугольник) и равнобедренный (по условию), то $\angle BAF = 45°$, следовательно, и $\angle KAD = 45°$.

Значит, в прямоугольном треугольнике AKD катет $DK = AD \cdot \sin 45°$. По условию $ABCD$ — прямоугольник, значит, $AD = BC$. Таким образом, $DK = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$.

10. О т в е т: 17.



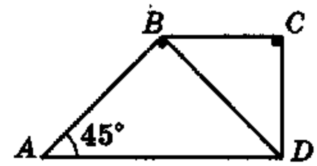
Решение. Соединим точку O с точками M и K и рассмотрим треугольник OKM. Отрезок OK перпендикулярен прямой KM как радиус, проведенный в точку касания. Значит, треугольник OKM — прямоугольный и его катеты равны $OK = 10$ см и $KM = 21$ см. По теореме Пифагора $OM^2 = OK^2 + KM^2 = 20^2 + 21^2$, $OM = 29$ см.

11. О т в е т: 1.

Решение. $\sin 60° \cdot \cos 30° - \cos 60° \cdot \mathrm{tg}\, 45° = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

12. О т в е т: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

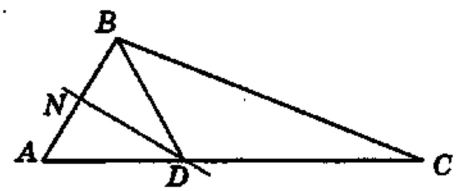
Решение. По условию треугольник ABD — прямоугольный равнобедренный, значит, $\angle BAD = \angle BDA = 45°$. Так как $CD \perp AD$ и $\angle BDA = 45°$, то $\angle BDC = 45°$. Следовательно,



треугольник BCD — прямоугольный равнобедренный, значит, $BC = CD = a$. Диагональ BD является гипотенузой прямоугольного треугольника ABD и по теореме Пифагора $BD^2 = BC^2 + CD^2 = 2a^2$.

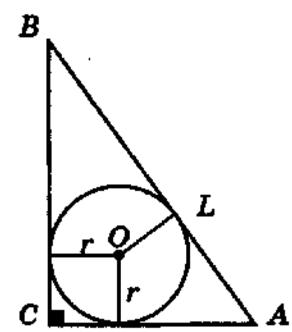
$BD = a\sqrt{2}$. Так как треугольник ABD — прямоугольный, равнобедренный, то $AB = BD$ и $AD^2 = AB^2 + BD^2 = 4a^2$, $AD = 2a$. Следовательно, $BD : AD = a\sqrt{2} : 2a = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Часть 3



13. <u>Решение</u>. Соединим точку D с вершиной B. В треугольнике ADB отрезок DN является высотой и медианой, так как прямая DN — серединный перпендикуляр к стороне AB. Значит, по свойству углов равнобедренного треугольника $\angle BAD = \angle ABD$. Луч BD проходит внутри угла ABC, так как он пересекает сторону AC треугольника ABC, значит, $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$ или, в силу равенства углов при основании равнобедренного треугольника, $\angle ABC = \angle BAD + \angle DBC$, следовательно $\angle ABC > \angle CAB$. В треугольнике против большего угла лежит большая сторона, для треугольника ABC $\angle ABC > \angle CAB$, значит $AC > CB$.

14. Ответ: 3.



<u>Решение</u>. По свойству касательных, проведенных из одной точки к окружности, $AK = AL$, $BL = BM$, $CM = CK$, отсюда $AB = BL + AL = 17$ см, $AC = AK + CK = 5$ см, $BC = BM + MC = 12$ см. Так как по условию $\angle MCK = 90°$, $\angle CMO = \angle CKO = 90°$ по свойству радиусов, проведенных в точку касания прямой и окружности, и при этом $MO = OK$, то четырехугольник $CMKO$ — квадрат. Значит, $MO = OK = CM = CK = r$. Отсюда в прямоугольном треугольнике ACB: гипотенуза $AB = 17$ см, катеты $AC = 5 + r$, $BC = 12 + r$. По теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

$$(r+5)^2 + (r+12)^2 = 17^2;\ r^2 + 17r - 60 = 0;\ r_{1,2} = \frac{-17 \pm \sqrt{289 + 240}}{2} = \frac{-17 \pm 23}{2};\ r = 3.$$

15. Ответ: 4.

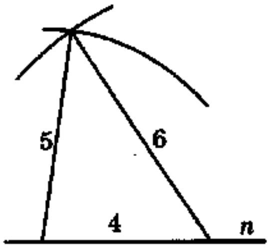
<u>Решение</u>. Проверим, какие тройки чисел, выражающие длины отрезков, из которых нужно составить треугольники, удовлетворяют неравенству треугольника.

Рассмотрим все возможные случаи, когда наибольшей стороной является сторона длиной 6.

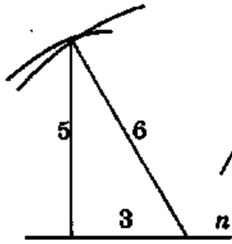
1. 6, 5 и 4; $6 < 5 + 4$, значит, такой треугольник существует. Из рисунка а) видно, что из отрезков 6, 5 и 4 можно построить треугольник.

2. 6, 5 и 3; $6 < 5 + 3$, значит, такой треугольник существует. Из рисунка б) видно, что из отрезков 6, 5 и 3 можно построить треугольник.

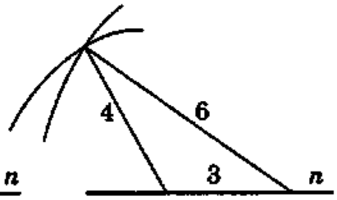
3. 6, 4 и 3; $6 = 4 + 3$, значит, такой треугольник существует. Из рисунка в) видно, что из отрезков 6, 4 и 3 можно построить треугольник.



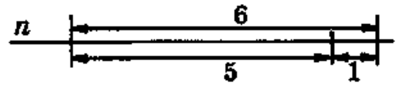
а)



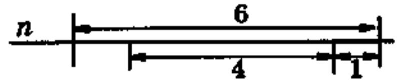
б)



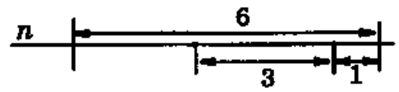
в)



г)



д)



е)

4. 6, 5 и 1; $6 = 5 + 1$, значит, такой треугольник не существует. Из рисунка г) видно, что в этом случае отрезки длиной 5 и 1 в сумме равны отрезку длиной 6.

5. 6, 4 и 1; $6 > 4 + 1$, значит, такой треугольник не существует. Из рисунка д) видно, что в этом случае отрезки длиной 4 и 1 в сумме меньше отрезка длиной 6.

6. 6, 3 и 1; $6 > 3 + 1$, значит, такой треугольник не существует. Из рисунка е) видно, что в этом случае отрезки длиной 3 и 1 в сумме меньше отрезка длиной 6.

Рассмотрим теперь все возможные случаи, когда наибольшей стороной является сторона длиной 5.

7. 5, 4 и 3; $5 < 4 + 3$, значит, такой треугольник существует. Из рисунка ж) видно, что из отрезков 5, 4 и 3 можно построить треугольник.

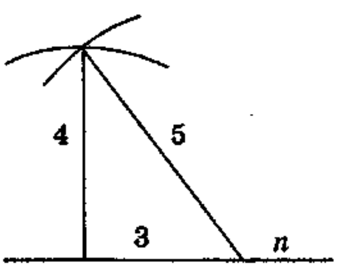
8. 5, 4 и 1; $5 = 4 + 1$, значит, такой треугольник не существует. Из рисунка з) видно, что в этом случае отрезки длиной 4 и 1 в сумме равны отрезку длиной 5.

9. 5, 3 и 1; $5 > 3 + 1$, значит, такой треугольник не существует. Из рисунка и) видно, что в этом случае отрезки длиной 3 и 1 в сумме меньше отрезка длиной 5.

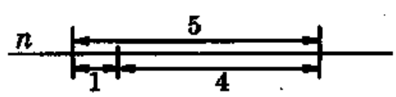
Рассмотрим все возможные случаи, когда наибольшей стороной является сторона длиной 4.

10. 4, 3 и 1; $4 = 3 + 1$, значит, такой треугольник не существует. Из рисунка к) видно, что в этом случае отрезки длиной 3 и 1 в сумме равны отрезку длиной 4.

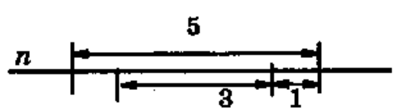
Таким образом, получили, что из отрезков длиной 1, 3, 4, 5 и 6 можно составить четыре треугольника, стороны которых равны: 6, 5 и 4; 6, 5 и 3; 6, 4 и 3; 5, 4 и 3.



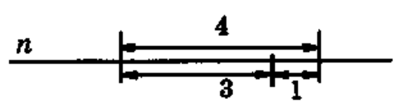
ж)



з)



и)



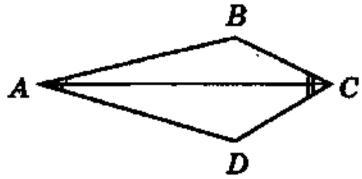
к)

ТЕСТ 3

Вариант 1

Часть 1

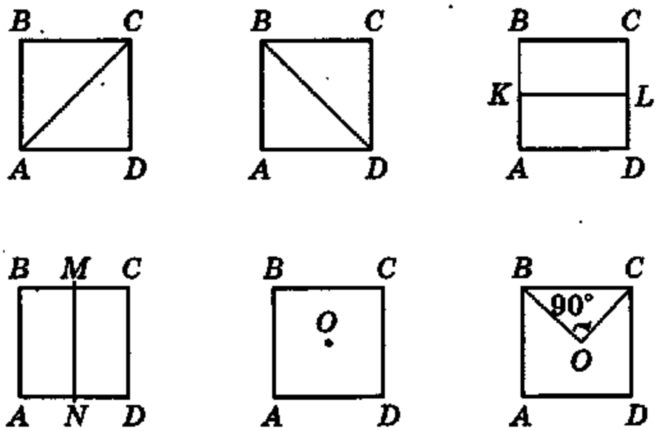
1. О т в е т: 2.



<u>Решение</u>. На рисунке — это четырехугольник 2). Рассмотрим этот четырехугольник и обозначим его вершины $ABCD$. Если провести диагональ AC, то получаем два равных треугольника ABC и ADC по трем сторонам $AB = AD$ и BC и DC (по данным чертежа) и AC (общая). Значит, $\angle CAB = \angle CAD$, следовательно, AC биссектриса $\angle BAD$ и является его осью симметрии, аналогично CA биссектриса $\angle BCD$ и является его осью симметрии, значит, диагональ AC является осью симметрии четырехугольника $ABCD$.

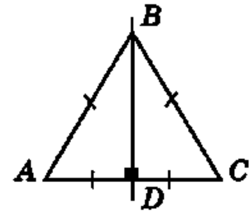
2. О т в е т: 3.

<u>Решение</u>. Квадрат $ABCD$ переходит сам в себя при осевой симметрии относительно прямых AC и BD, KL и MN.



При центральной симметрии относительно центра O и при повороте на $90° n$, где n — целое число, относительно центра O. При этом следует заметить, что симметрия относительно центра квадрата совпадает с поворотом на $180°$.

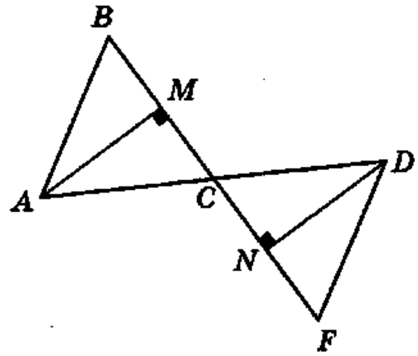
3. О т в е т: 2.



<u>Решение</u>. По свойству движения отрезок переходит в отрезок, значит, одна вершина треугольника должна перейти в другую его вершину. Но у треугольника три вершины, следовательно, одна из них должна перейти сама в себя, т. е. лежать на оси симметрии. Рассмотрим симметрию треугольника ABC относительно прямой BD, проходящей через вершину B. Так как BD — ось симметрии треугольника ABC, то вершина A переходит в вершину C, $BD \perp AC$ и $AD = DC$. Значит, в треугольнике ABC медиана BD является и высотой. Следовательно, $AB = BC$. Аналогично, при рассмотрении симметрии относительно прямой, проходящей через вершину A, доказывается, что стороны AC и AB равны. Значит, в треугольнике ABC все три стороны равны, т. е. $AB = BC = AC$. Значит, треугольник ABC — равносторонний. Рассмотрение симметрии относительно прямой, проходящей через вершину C, позволяет проверить доказанное утверждение, т. е. подтвердить, что сторона $AC = BC$.

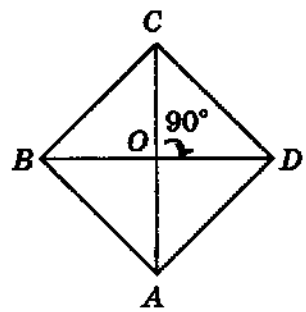
4. О т в е т: 3.

Решение. При преобразовании симметрии относительно точки C вершина A перешла в точку D, причем точки A, C и D лежат на одной прямой AD, а вершина B — в точку F и точки B, C и F лежат на одной прямой BF. В треугольнике ABC проведена высота AM из вершины A к стороне BC, а в треугольнике FDC проведена высота DN из вершины D к стороне FC. Таким образом, к прямой BF проведены два перпендикуляра AM и DN, следовательно, прямые, содержащие высоты AM и DN, параллельны.



5. О т в е т: 3.

Решение. В параллелограмме $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O. При повороте около точки O на угол 90° луч OB переходит в луч OC, а луч OC — в луч OD, луч OD — в луч OA и луч OA — в луч OB. Значит, диагонали AC и BD параллелограмма перпендикулярны, $AC \perp BD$ и параллелограмм $ABCD$ — ромб. При повороте вершина C должна перейти в вершину D так, что $OC = OD$, т. е. диагонали ромба равны. Следовательно, ромб — квадрат.



Часть 2

6. О т в е т: 10.

Решение. 1 способ. В треугольнике ABC средняя линия MN параллельна стороне CB и равна ее половине. Расстояние между точками вычисляется по формуле $d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$. Координаты концов отрезка CB даны: $B(-8, 6)$, $C(4, -10)$, значит, $CB = \sqrt{(-8-4)^2 + (6-(-10))^2} = 20$, $MN = 10$.

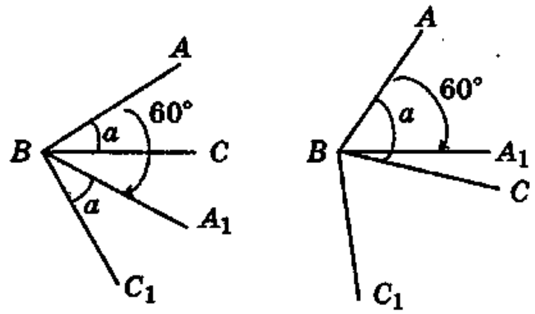
2 способ. В треугольнике ABC средняя линия, обозначим ее MN, параллельна стороне CB, значит, она проходит через середины сторон AB и AC — точки M и N соответственно. Координаты точек M и N находим по формулам: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ и $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$. Для точки M $x = \frac{(-3)+(-8)}{2} = -5{,}5$, $y = \frac{(-6)+6}{2} = 0$; для точки N $x = \frac{(-3)+4}{2} = 0{,}5$, $y = \frac{(-6)+10}{2} = -8$. Значит, $M(-5{,}5; 0)$ и $N(0{,}5; -8)$. Найдем длину $MN = \sqrt{(-5{,}5 - 0{,}5)^2 + (0-(-8))^2} = 10$.

7. О т в е т: D (6, 2).

Решение. Основание медианы CD треугольника ABC делит сторону AC пополам, т. е. $AD = DB$. Координаты середины отрезка находим по формулам: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ и $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$. Точка D является серединой отрезка AB, концы которого имеют координаты $A(7, 3)$ и $B(5, 1)$. Значит, $x = \frac{7+5}{2} = 6$, $y = \frac{3+1}{2} = 2$. Таким образом, $D(6, 2)$.

8. О т в е т: $60° + \alpha$.

Решение. Возможны два случая: 1. $\alpha < 60°$ и 2. $\alpha > 60°$.

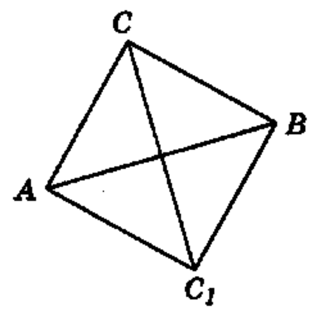


При повороте угла ABC на $60°$ каждый луч, выходящий из точки B, поворачивается на угол в $60°$, т. е. луч BA перейдет в луч BA_1 и $\angle ABA_1 = 60°$, а луч BC — в луч BC_1 и $\angle CBC_1 = 60°$.

В первом случае, так как $\alpha < 60°$, то луч BC проходит между сторонами угла ABA_1, значит, $\angle CBA_1 = \angle ABA_1 - \angle ABC = 60° - \alpha$ и $\angle CBA_1 < 60°$. Отсюда следует, что луч BA_1 проходит между сторонами угла $\angle CBC_1$, равного $60°$. Таким образом, $\angle ABC_1 = \angle ABC + \angle CBA_1 + \angle A_1B_1C_1 = \alpha + 60° - \alpha + \alpha = 60° + \alpha$.

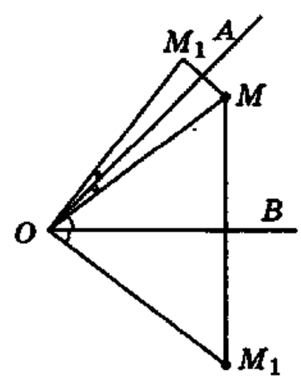
Во втором случае, так как $\alpha > 60°$, то луч BA_1 проходит между сторонами угла ABC, значит, $\angle A_1BC = \angle ABC - \angle ABA_1 = \alpha - 60°$ и $\angle A_1BC < \alpha$. Отсюда следует, что луч BC проходит между сторонами угла $\angle A_1BC_1$, равного α. Таким образом, $\angle ABC_1 = \angle ABA_1 + \angle A_1BC + \angle CBC_1 = 60° + 60° + \alpha - 60° = 60° + \alpha$.

9. О т в е т: $12\sqrt{2}$.



Решение. При симметрии относительно прямой отрезки переходят в равные им отрезки. Так как при симметрии прямоугольного равнобедренного треугольника ABC относительно прямой, содержащей его гипотенузу AB, вершина C перешла — в точку C_1, катет AC перешел в равный ему отрезок AC_1, а катет BC — в отрезок BC_1. Таким образом, у четырехугольника $ABCC_1$ все стороны равны и угол ACB равен $90°$, то четырехугольник $ABCC_1$ — квадрат, в котором CC_1 является диагональю. У квадрата диагонали равны, значит $AB = CC_1$. По теореме Пифагора найдем AB как гипотенузу прямоугольного треугольника ABC; $AB = 12\sqrt{2}$ см, следовательно, $CC_1 = 12\sqrt{2}$ см.

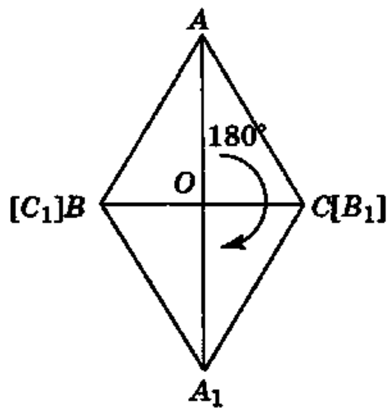
10. О т в е т: 90.



Решение. Соединим точки M, M_1 и M_2 с вершиной угла, точкой O. При симметрии относительно прямой углы переходят в равные им углы, значит, $\angle AOM_2 = \angle AOM$ и $\angle BOM_1 = \angle BOM$. По построению точек M_1 и M_2 лучи OA и OB проходят между сторонами угла M_2OM_1, таким образом, $\angle M_2OM_1 = \angle AOM_2 + \angle AOB + \angle BOM_1 = 45° + (\angle AOM + \angle BOM) = 90°$.

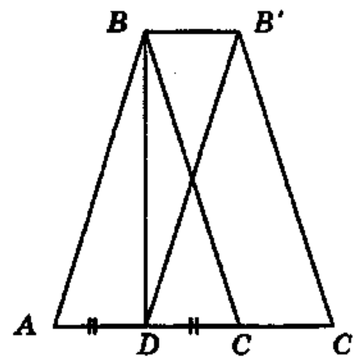
11. Ответ: 12.

<u>Решение</u>. Пусть точка O — середина стороны BC. При повороте на угол 180° около точки O луч OB переходит в луч OB_1, а луч OC переходит в луч OC_1, который дополняет луч OB_1 до прямой, при этом точка O принадлежит отрезку CC_1. Таким образом, $CC_1 = OC + OC_1(B) = BC = 12$ см, как сторона равностороннего треугольника.



12. Ответ: 18.

<u>Решение</u>. Точка D — середина стороны AC, так как отрезок DB — медиана треугольника ABC. При параллельном переносе точки смещаются по параллельным прямым на равные расстояния, при этом прямая переходит в параллельную прямую или сама в себя, а, поскольку параллельный перенос, — движение, то равные отрезки переходят в равные. При параллельном переносе треугольник ABC перешел в треугольник $DB'C'$, причем вершина A перешла в точку D, значит, вершина B перешла в точку B' и $BB' = AD$, $AB = DB'$, кроме того, $BB' \parallel AD$, $AB \parallel DB'$. Следовательно, четырехугольник $ABB'D$ — параллелограмм. Точка D — середина стороны AC, значит, $AD = \frac{1}{2}AC = 4$ см.

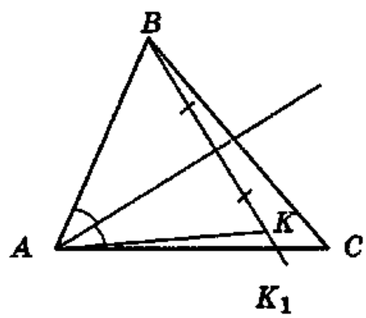


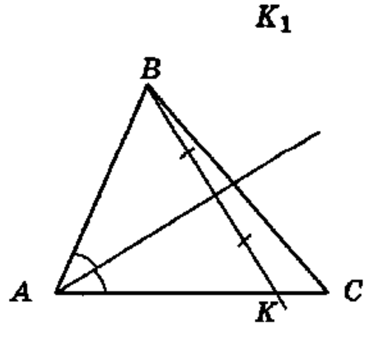
$P_{ABB'D} = AB + BB' + DB' + AD = 2AD + 2AB =$
$= 2(4 + 5) = 18$ (см).

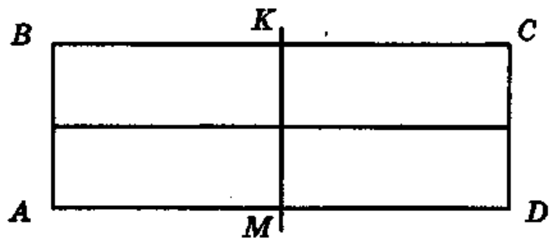
Часть 3

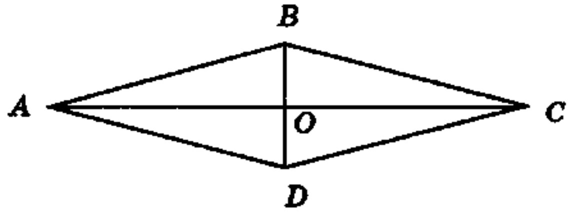
13. Ответ: 2.

<u>Решение.</u> По условию вершина B треугольника ABC симметрична точке K, значит отрезки BM и MK равны, а прямые BK и AM перпендикулярны. Следовательно, треугольники ABM и AKM — прямоугольные и равны по двум катетам ($BM = MK$, катет AM — общий). Обозначим точку пересечения прямой BK со стороной AC как K_1. По условию $\angle BAM = \angle K_1AM$, так как AM — биссектриса $\angle BAC$. Из равенства треугольников ABM и AKM следует $\angle BAM = \angle K_1AM$. Получили, что от одного луча AM в одну полуплоскость отложены два равных угла, что противоречит аксиоме откладывания углов. Значит, точки K и K_1 совпадают. Отсюда, в треугольнике ABK биссектриса угла BAK является высотой и медианой, следовательно, треугольник BAK — равнобедренный, $AB = AK$. Отсюда $CK = AC - AB = 5 - 3 = 2$ (см).









14. Решение. По свойству движения отрезок переходит в отрезок, значит, одна вершина параллелограмма должна перейти в другую его вершину. Так как у четырехугольника четыре вершины, то две его вершины должны перейти в две другие вершины. При симметрии относительно прямой KM, проходящей через середину стороны BC параллелограмма $ABCD$, вершина B переходит в вершину C, а вершина A должна перейти в вершину D. При этом $KM \perp BC$ и $BK = KC$. В параллелограмме противолежащие стороны равны и параллельны, значит, $KM \perp AD$ и $AM = MD$. В параллелограмме $ABCD$ при симметрии относительно прямой KM стороны AD и BC переходят сами в себя. Отсюда отрезок AB переходит в равный ему отрезок CD. В четырехугольнике $MKCD$ стороны KC и MD равны и параллельны, а угол MKC — прямой, значит, четырехугольник $MKCD$ — прямоугольник, отсюда параллелограмм $ABCD$ — также прямоугольник.

Однако, если данный параллелограмм — прямоугольник, то он имеет вторую ось симметрии, проходящую через середины сторон AB и CD, но по условию ось симметрии только одна. Пришли к противоречию.

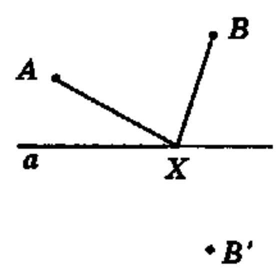
Рассмотрим симметрию параллелограмма $ABCD$ относительно оси BD, которая является диагональю параллелограмма. При этом две вершины, а именно, B и D переходят сами в себя, так как лежат на оси симметрии, а вершина C должна перейти в вершину A, значит, в параллелограмме $ABCD$ диагонали перпендикулярны, следовательно, параллелограмм $ABCD$ — ромб.

Однако, если данный параллелограмм — ромб, то он имеет вторую ось симметрии, проходящую через диагональ AC, но по условию ось симметрии только одна. Пришли к противоречию.

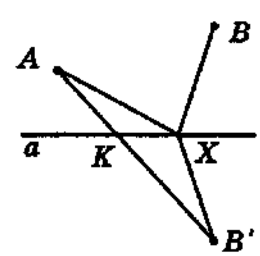
Следовательно, такой параллелограмм не существует.

15. Решение. Предположим, что задача решена и остановка находится в некоторой точке X (рис. а). Значит надо минимизировать сумму $AX + XB$. Построим точку B', симметричную точке B относительно прямой a (рис. б). По определению осевой симметрии $BX = B'X$. Поэтому $AX + XB = AX + XB'$. Сумма $AX + XB'$ будет наименьшей, когда точка X лежит на прямой a и является точкой пересечения отрезка AB' с прямой a. Соединим точки A и B'. Отрезок $A'B$ пересекает прямую a в точке K (рис. б). Точка K и дает решение задачи.

а)



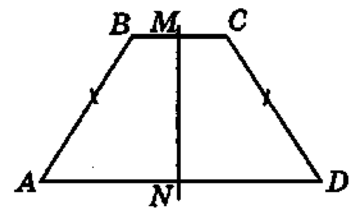
б)



Вариант 2

Часть 1

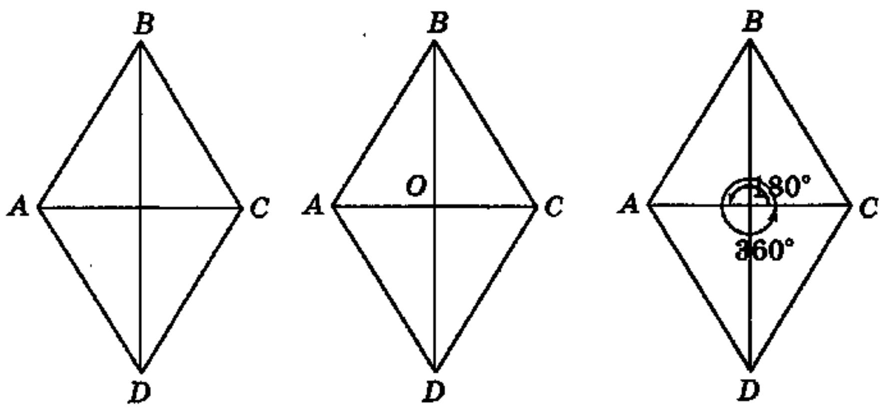
1. Ответ: 3.



Решение. На рисунке — это трапеция 3). Рассмотрим эту трапецию и обозначим ее вершины $ABCD$. Проведем прямую NM, проходящую через середину стороны BC и перпендикулярную ей. Тогда прямая NM перпендикулярна и стороне AD, так как по данным чертежа BC и AD — основания трапеции, значит $BC \parallel AD$. Рассмотрим симметрию относительно этой прямой.

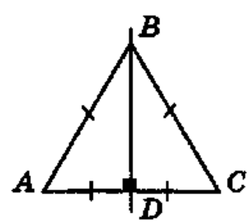
Так как $BM = MC$, то вершина B переходит в вершину C, по данным чертежа $AB = CD$, значит, отрезок AB переходит в отрезок, следовательно, точка A переходит в вершину D. Значит, трапеция $ABCD$ при симметрии относительно прямой NM переходит сама в себя и прямая NM ее ось симметрии.

2. Ответ: 4.



Решение. Ромб $ABCD$ переходит сам в себя при осевой симметрии относительно прямых AC и BD, при центральной симметрии относительно точки O, при повороте на $180°n$, где n — целое число, относительно центра O. При этом следует заметить, что симметрия относительно центра ромба совпадает с поворотом на $180°$.

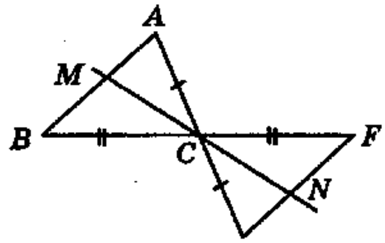
3. Ответ: 3.



Решение. По свойству движения отрезок переходит в отрезок, значит, одна вершина треугольника должна перейти в другую его вершину. Но у треугольника три вершины, следовательно, одна из них должна перейти сама в себя, т. е. лежать на оси симметрии. Рассмотрим симметрию треугольника ABC относительно прямой BD, проходящей через вершину B. Так как BD — ось симметрии треугольника ABC, то вершина A переходит в вершину C, при этом, $BD \perp AC$ и $AD = DC$. Значит, в треугольнике ABC медиана BD является и высотой. Следовательно, треугольник ABC — равнобедренный.

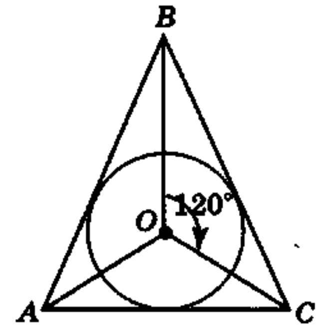
4. Ответ: 4.

Решение. При преобразовании симметрии относительно точки C вершина A перешла в точку D, причем точки A, C и D лежат на одной прямой AD, а вершина B — в точку F и точки B, C и F лежат на одной прямой BF. Так как точка C принадлежит и прямой AD и прямой BF, значит, прямые AD и BF пересекаются в точке C. Следовательно, углы ACB и FCD — вертикальные. В треугольнике ABC отрезок CM является биссектрисой угла ACB, а в треугольнике FDC отрезок CN является биссектрисой угла FCD. Известно, что биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой, значит, прямые, содержащие биссектрисы CM и CN, совпадают.



5. О т в е т: 2.

Решение. При повороте около точки O на угол 120° луч OB переходит в луч OC, а луч OC — в луч OA и луч OA — в луч OB. Центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис треугольника. Обозначим углы треугольника ABC: $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle ABC = 2\beta$, $\angle ACB = 2\gamma$. Тогда в треугольнике BOC в силу теоремы о сумме углов треугольника $120° + \beta + \gamma = 180°$, отсюда $\beta + \gamma = 60°$. из треугольника AOC получим $\alpha + \gamma = 60°$, а из треугольника AOB получим $\alpha + \beta = 60°$. Значит:



$$\begin{cases} \alpha + \beta = 60°, \\ \beta + \gamma = 60°, \\ \alpha + \gamma = 60°, \end{cases} \quad \alpha = 60° - \beta, \quad 60° - \beta + \gamma = 60°, \quad \beta = \gamma.$$

Аналогично, получаем $\alpha = \beta$ и $\alpha = \gamma$. Таким образом, в треугольнике ABC все углы равны, следовательно, треугольник — равносторонний.

Часть 2

6. О т в е т: 13.

Решение. Основание медианы CD треугольника ABC делит сторону AC пополам, т. е. $AD = DB$. Координаты середины отрезка находим по формулам: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ и $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$. Точка D является серединой отрезка AB, концы которого имеют координаты $A(7, 3)$ и $B(5, 1)$. Значит, $x = \frac{7+5}{2} = 6$, $y = \frac{3+1}{2} = 2$. Таким образом, $D\,(6, 2)$. Расстояние между точками вычисляется по формуле $d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$. Координаты концов отрезка CD: $C(1, 14)$ и $D\,(6, 2)$, значит, $CD = \sqrt{(1-6)^2 + (14-2)^2} = 13$.

7. О т в е т: (4, 1).

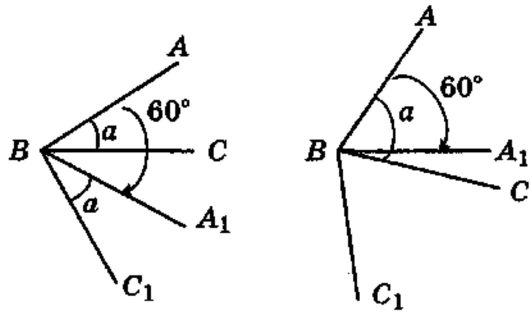
Решение. Центр окружности, точка O, лежит на ее диаметре AB и делит его пополам, т. е. $AO = BO$. Координаты точки O находим по формулам: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ и $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$. Точка O является серединой отрезка AB, концы которого имеют координаты $A(1, 5)$ и $B(7, -3)$. Значит, $x = \frac{1+7}{2} = 4$, $y = \frac{5-3}{2} = 1$. Таким образом, $O\,(4, 1)$.

8. О т в е т: $60° + \alpha$.

Решение. Возможны два случая: 1. $\alpha < 60°$ и 2. $\alpha > 60°$.

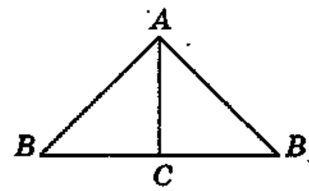
При повороте угла ABC на 60° каждый луч, выходящий из точки B, поворачивается на угол в 60°, т. е. луч BA перейдет в луч BA_1 и $\angle ABA_1 = 60°$, а луч BC — в луч BC_1 и $\angle CBC_1 = 60°$.

В первом случае, так как $\alpha < 60°$, то луч BC проходит между сторонами угла ABA_1, значит, $\angle CBA_1 = \angle ABA_1 - \angle ABC = 60° - \alpha$.



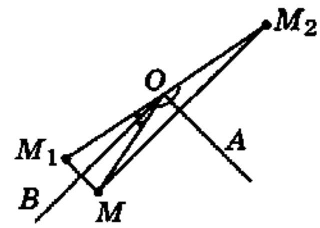
Во втором случае, так как $\alpha > 60°$, то луч BA_1 проходит между сторонами угла ABC, значит, $\angle A_1BC = \angle ABC - \angle ABA_1 = \alpha - 60°$.

9. Ответ: $7\sqrt{2}$.



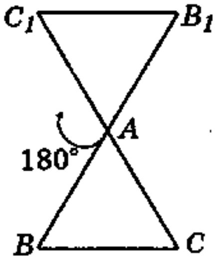
Решение. При симметрии относительно прямой отрезки переходят в равные им отрезки, а углы в равные им углы. При симметрии прямоугольного равнобедренного треугольника AC относительно прямой, содержащей его катет AC, вершина B перешла в точку B_1, значит, катет BC перешел в равный ему отрезок CB_1, а угол BAC в равный ему угол B_1AC, катет AC перешел сам в себя. Таким образом, у треугольника BAB_1 угол BAB_1 — прямой, стороны AB и AB_1 равны, значит, треугольник BAB_1 — прямоугольный и равнобедренный. По теореме Пифагора найдем BB_1 как гипотенузу прямоугольного треугольника BAB_1; $BB_1 = \sqrt{2AB^2} = 7\sqrt{2}$ (см).

10. Ответ: 180.



Решение. Соединим точки M, M_1 и M_2 с вершиной угла — точкой O. При симметрии относительно прямой углы переходят в равные им углы, значит, $\angle AOM_2 = \angle AOM$ и $\angle BOM_1 = \angle BOM$. По построению точек M_1 и M_2 лучи OA и OB проходят между сторонами угла M_2OM_1, таким образом, $\angle M_2OM_1 = \angle AOM_2 + \angle AOB + \angle BOM_1 = 90° + (\angle AOM + \angle BOM) = 90° + 90° = 180°$.

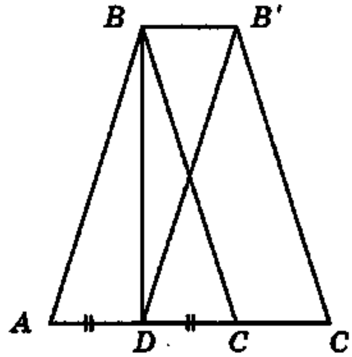
11. Ответ: 24.



Решение. При повороте около вершины A вершина Aпереходит сама в себя, а вершина B — в точку B_1, вершина C — в точку C_1, при этом расстояния между точками сохраняются. Значит, $AB = AB_1$, $AC = AC_1$. При повороте на угол 180° вокруг вершины A луч AC переходит в луч AC_1, который дополняет луч AC до прямой, при этом точка A принадлежит отрезку CC_1. Таким образом, $CC_1 = AC + AC_1 = 2\,AC = 24$ см.

12. Ответ: 18.

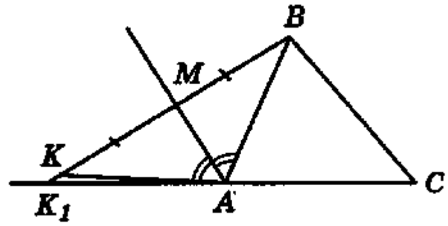
Решение. Точка D — середина стороны AC, так как отрезок DB — медиана треугольника ABC. При параллельном переносе точки смещаются по параллельным прямым на равные расстояния, при этом прямая переходит в параллельную прямую или сама в себя, а поскольку параллельный перенос — движение, то равные отрезки переходят в равные. При параллельном переносе треугольник ABC перешел в треугольник $DB'C'$, причем вершина A перешла в точку D, вершина B перешла в точку B' и при этом $BB' = AD$, $AB = DB'$, кроме того $BB' \parallel AD$, $AB \parallel DB'$. Следовательно, четырехугольник $ABB'D$ — параллелограмм. Треугольник ABC — равносторонний, точка D — середина стороны AC, значит, $AD = \frac{1}{2}AC = 3$ см; $P_{ABB'D} = AB + BB' + DB' + AD = 2AD + 2AB = 2(3 + 6) = 18$ (см).

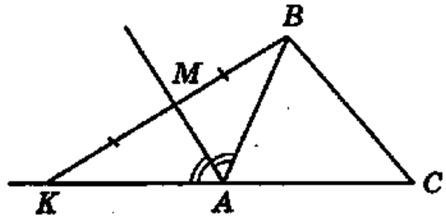


Часть 3

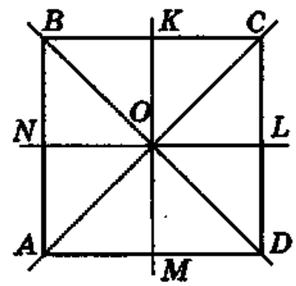
13. Ответ: 18.

Решение. По условию вершина B треугольника ABC симметрична точке K, значит отрезки BM и MK равны, а прямые BK и AM перпендикулярны. Следовательно, треугольники ABM и AKM — прямоугольные и равны по двум катетам ($BM = MK$, катет AM — общий). Обозначим точку пересечения прямой BK с прямой, содержащей сторону AC, как K_1. По условию $\angle BAM = \angle K_1AM$, так как AM — биссектриса угла, смежного с углом BAC. Из равенства треугольников ABM и AKM следует $\angle BAM = \angle K_1AM$. Получили, что от одного луча AM в одну полуплоскость отложены два равных угла, что противоречит аксиоме откладывая углов. Значит, точки K и K_1 совпадают. Отсюда, в треугольнике ABK биссектриса угла BAK является высотой и медианой, следовательно, треугольник BAK — равнобедренный, $AB = AK$. Отсюда $CK = AC + AB = 5 + 3 = 8$ (см).





14. Решение. По свойству движения отрезок переходит в отрезок, значит, одна вершина параллелограмма должна перейти в другую его вершину. Так как у параллелограмма четыре вершины, то две вершины параллелограмма должны перейти в две другие вершины параллелограмма. Рассмотрим симметрию параллелограмма $ABCD$ относительно оси BD, которая является его диагональю. При этом две вершины, а именно, B и D переходят сами в себя, так как лежат на оси симметрии, а вершина C должна перейти в вершину A, значит, в параллелограмме $ABCD$ диагонали перпендикулярны, следовательно, параллелограмм $ABCD$ — ромб.

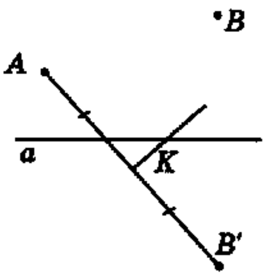


При симметрии относительно прямой KM, проходящей через середину стороны BC ромба $ABCD$, вершина B переходит в вершину C, а вершина A должна перейти в вершину D. При этом $KM \perp BC$ и $BK = KC$. В ромбе все стороны равны, а противолежащие стороны параллельны, значит, $KM \perp AD$ и $AM = MD$. Следовательно, в ромбе $ABCD$ при симметрии относительно прямой KM стороны AD и BC переходят сами в себя. Отсюда отрезок AB переходит в равный ему отрезок CD. В четырехугольнике $MKCD$ стороны KC и MD равны и параллельны, а угол MKC — прямой, значит, четырехугольнике $MKCD$ — прямоугольник, отсюда ромб $ABCD$ — квадрат.

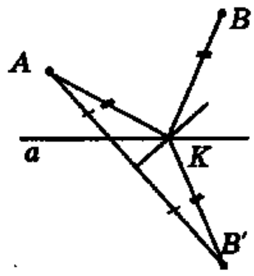
Рассмотрение симметрии ромба $ABCD$ относительно прямой NL, проходящей через середину стороны AD приводит к тому же результату, а именно ромб $ABCD$ — квадрат.

Следовательно, если параллелограмм имеет четыре оси симметрии, то он — квадрат.

15. Решение. Построим точку B', симметричную точке B относительно прямой a (рис. а). Соединим точки A и B' (рис. б). Построим серединный перпендикуляр к отрезку AB', который пересекает прямую a в точке K (рис. б). Соединим точку K с точками A и B' (рис. б). По свойству серединного перпендикуляра $AK = KB'$, а по свойству осевой симметрии $KB' = BK$, следовательно, $AK = BK$. Точка K и дает решение задачи.



а)



б)

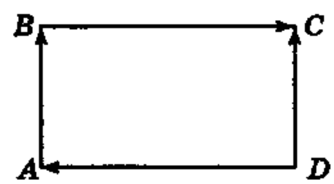
ТЕСТ 4

Вариант 1

Часть 1

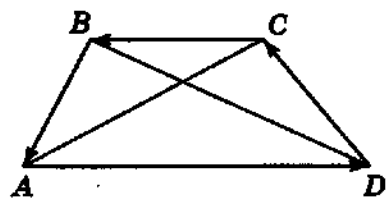
1. Ответ: 1.

Решение. Чтобы установить равенство двух векторов необходимо проверить: первое, являются ли они коллинеарными, второе, сонаправлены они или противоположно направлены, третье, равны ли их модули. Векторы, лежащие на сторонах AB и DC, равны по модулю, аналогично векторы, лежащие на сторонах BC и AD, равны по модулю, поскольку противоположные стороны параллелограмма равны. В паре $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$ векторы сонаправлены, в паре $\overline{BC}$ и $\overline{DA}$ векторы противоположно направлены, в парах $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$, $\overline{DC}$ и $\overline{DA}$ векторы не коллинеарны. Таким образом, условию равенства векторов соответствует только пара $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$.



2. Ответ: 4.

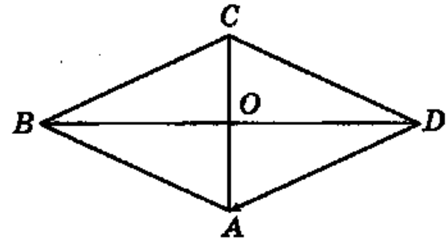
Решение. Применим правило многоугольника сложения векторов $\overline{CB} = \overline{CD} + \overline{DA} + \overline{AB}$. Векторы $\overline{AB}$, $\overline{DA}$ и $\overline{CD}$ по модулю равны векторам $\overline{BA}$, $\overline{AD}$ и $\overline{DC}$, но противоположно направлены. Значит, $\overline{CB} = -(\overline{DC} + \overline{AD} + \overline{BA}) = -(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})$.



3. Ответ: 2.

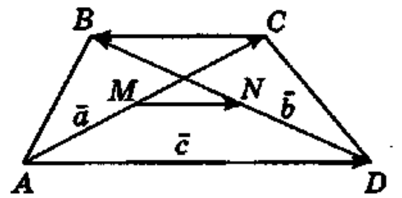
Решение. Обозначим координаты вектора $\bar{c}$ буквами x_1, и x_2, координаты вектора $\bar{a}$ — a_1 и a_2, координаты вектора $\bar{b}$ — b_1 и b_2. Так как $\bar{c} = 2\bar{a} - \frac{1}{7}\bar{b}$, то $x_1 = 2a_1 - \frac{1}{7}b_1 = -2 - 2 = -4$; $x_2 = 2a_2 - \frac{1}{7}b_2 = 4 - 1 = 3$. Таким образом $(-4; 3)$.

4. Ответ: 3.



Решение. По определению длина вектора равна длине отрезка AD. Отрезок AD является стороной ромба $ABCD$. Из свойства диагоналей ромба следует, что треугольник AOD — прямоугольный и $AO = 5$ см, $DO = 12$ см. По теореме Пифагора $AD = \sqrt{AO^2 + OD^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ (см). Следовательно, $|\overline{DA}| = 13$ см.

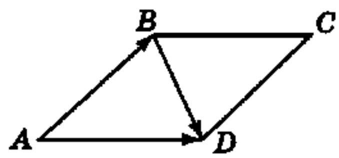
5. Ответ: 3.



Решение. По правилу многоугольника сложения векторов $\overline{AD} = \overline{AM} + \overline{MN} + \overline{ND}$. Так как точки M и N — середины диагоналей AC и BD, то $\overline{AM} = \frac{1}{2}\bar{a}$ и $\overline{DN} = \frac{1}{2}\bar{b}$. Вектор $\overline{ND}$ по модулю равен вектору $\overline{DN}$, но противоположно направлен. Значит, $\overline{ND} = -\frac{1}{2}\bar{b}$. Отсюда, $\overline{MN} = \overline{AD} - (\overline{AM} + \overline{ND}) = \overline{AD} - \overline{AM} - \overline{ND} = \bar{c} - \frac{1}{2}\bar{a} + \frac{1}{2}\bar{b}$.

Часть 2

6. Ответ: (–1; 3).



Решение. Вектор $\overline{BD}$ является разностью векторов $\overline{AD}$ и $\overline{AB}$, т. е. $\overline{BD} = \overline{AD} - \overline{AB}$. Обозначим $\overline{BD} = \bar{c}(x_1; x_2)$, тогда $x_1 = 1 - 2 = -1$, $x_2 = 0 + 3 = 3$. Таким образом $\overline{BD}(-1;\ 3)$.

7. Ответ: $-3\bar{a}$.

Решение. По условию $|\overline{CD}| = 3|\bar{a}|$ и векторы $\bar{a}$ и $\overline{CD}$ противоположно направлены, следовательно, $\overline{CD} = -3\bar{a}$.

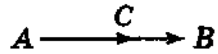
8. Ответ: 0.

Решение. В силу переместительного закона $\overline{MB} + \overline{AM} + \overline{BA} = \overline{AM} + \overline{MB} + \overline{BA} = \overline{AB} + \overline{BA}$. Векторы и равны по модулю, но противоположно направлены, значит $\overline{AB} + \overline{BA} = 0$.

9. Ответ: 3.

Решение. Пусть $\bar{b} = x\,\bar{a}$. Поскольку $|\bar{a}| = 1$, $|\bar{b}| = 2$ и векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ сонаправленны, то $x = 2$, т. е. $\bar{b} = 2\bar{a}$. По условию $2\bar{a} + 0{,}5\bar{b} - \bar{c} = 0$, значит, $\bar{c} = 2\bar{a} + 0{,}5\bar{b} = 3\bar{a}$. Следовательно, $|\bar{c}| = 3$.

10. Ответ: (4; 10).



Решение. По условию векторы $\overline{AC}$ и $\overline{AB}$ лежат на одной прямой и началом обоих векторов является одна и та же точка A и точка C принадлежит отрезку AB, значит, векторы $\overline{AC}$ и $\overline{AB}$ коллинеарны и сонаправленны. При этом $|\overline{AC}| : |\overline{CB}| = 2 : 1$, значит, $|\overline{AC}| : |\overline{AB}| = 2 : 3$, $\overline{AC} = \frac{2}{3}\overline{AB}$. Обозначим координаты вектора $\overline{AC}$ – $(x_1; x_2)$, тогда $x_1 = \frac{2}{3}\cdot 6 = 4$, $x_2 = \frac{2}{3}\cdot 15 = 10$. Таким образом, $\overline{AC}(4; 10)$.

11. Ответ: 90.

Решение. Перемножим $\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}\cdot\frac{\bar{a}-\bar{b}}{2} = \frac{(\bar{a}+\bar{b})(\bar{a}-\bar{b})}{4} = \frac{\bar{a}^2-\bar{b}^2}{4} = \frac{|\bar{a}|^2-|\bar{b}|^2}{4}$. По условию вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имеют общее начало в вершине равнобедренного треугольника, а их концы находятся в вершинах при основании этого треугольника, значит, модули этих векторов равны, так как отрезки a и b являются сторонами равнобедренного треугольника. Следовательно, скалярное произведение векторов $\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}\cdot\frac{\bar{a}-\bar{b}}{2} = 0$. По следствию из теоремы о скалярном произведении векторов, если скалярное произведение векторов равно нулю, то векторы перпендикулярны. Следовательно, угол между векторами $\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}$ и $\frac{\bar{a}-\bar{b}}{2}$ равен $90°$.

12. Ответ: 0.

Решение. Обозначим угол между векторами α. По определению скалярного произведения векторов $\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\alpha$. По условию $|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\alpha = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|$, следовательно, $\cos\alpha = 1$. Значит, угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен нулю.

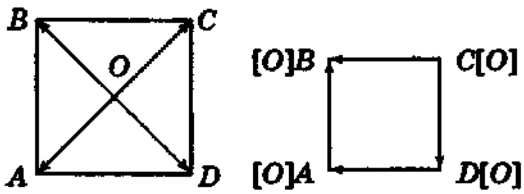
Часть 3

13. Решение. Вычтем из обеих частей вектор $\overline{OC}$, тогда $\overline{OK} - \overline{OC} = \frac{2}{7}\overline{OA} + \frac{5}{7}\overline{OC} - \overline{OC} = \frac{2}{7}\overline{OA} - \frac{2}{7}\overline{OC}$, т. е. $\overline{CK} = \frac{2}{7}\overline{CA}$. Отсюда следует, что эти векторы коллинеарны, т. е. точка K лежит на отрезке CA и делит его в отношении 2 : 5; $\overline{CK} = \frac{2}{5}\overline{KA}$.

14. Решение. От одной точки нужно отложить векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ и провести вектор из конца вектора $\vec{y}$ в начало вектора $\vec{x}$, получим вектор $\vec{x}-\vec{y}$. Получим треугольник со сторонами $|\vec{x}|$, $|\vec{y}|$ и $|\vec{x}-\vec{y}|$ в силу теоремы о неравенстве треугольника $|\vec{x}-\vec{y}| \leqslant |\vec{x}|+|\vec{y}|$.

При этом, если векторы не коллинеарны, то выполняется строгое неравенство $|\vec{x}-\vec{y}| < |\vec{x}|+|\vec{y}|$, если векторы коллинеарны, то $|\vec{x}-\vec{y}| = |\vec{x}|+|\vec{y}|$.

15. Решение. От произвольной точки плоскости отложим вектор $\overline{OA}$. От точки $A[O]$ отложим вектор, равный $\overline{OB}$. Затем отложим векторы, соответственно равные $\overline{OC}$ и $\overline{OD}$. Так как диагонали квадрата пересекаются под прямым углом, то у полученного четырехугольника все углы прямые, Значит, полученный четырехугольник — прямоугольник, а так как диагонали квадрата равны и точкой пересечения делятся пополам, то и стороны прямоугольника равны. Следовательно, полученный прямоугольник — квадрат. По правилу многоугольника сложения векторов $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = 0$.

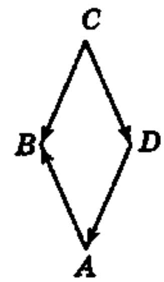


Вариант 2

Часть 1

1. Ответ: 2.

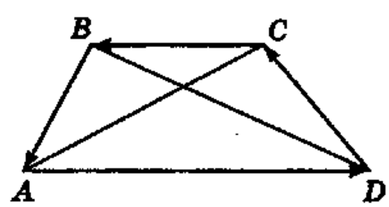
Решение. Чтобы установить равенство двух векторов необходимо проверить: первое, являются ли они коллинеарными, второе, сонаправлены они или противоположно направлены, третье, равны ли их модули.



Все векторы во всех парах по модулю равны, поскольку являются сторонами ромба. В паре $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$ векторы противоположно направлены, в паре $\overline{BC}$ и $\overline{DA}$ векторы сонаправлены, в парах $\overline{AB}$ и $\overline{CB}$, $\overline{CD}$ и $\overline{DA}$ векторы не коллинеарны. Таким образом, условию равенства векторов соответствует только одна пара $\overline{CB}$ и $\overline{DA}$.

2. Ответ: 4.

Решение. По правилу треугольника сложения векторов $\overline{BD} = \overline{BA} + \overline{AD} = \bar{a} + \bar{b}$. С другой стороны $\overline{BD} = -(\overline{DC} + \overline{CB})$. Значит, $\overline{DC} = -(\overline{BD} + \overline{CB}) = -(\bar{a} + \bar{b}) - \bar{c} = -(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})$.

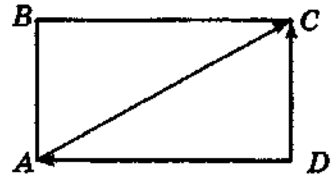


3. Ответ: 1.

Решение. Обозначим координаты вектора $\bar{c}$ буквами x_1, и x_2, координаты вектора $\bar{a}$ — a_1 и a_2, координаты вектора $\bar{b}$ — b_1 и b_2. Так как $\bar{c} = \bar{b} - \frac{1}{7}\bar{a}$, то $x_1 = b_1 - \frac{1}{7}a_1 = 1 + 1 = 2$; $x_2 = b_2 - \frac{1}{7}a_2 = 1$. Таким образом $\bar{c}(2; 1)$.

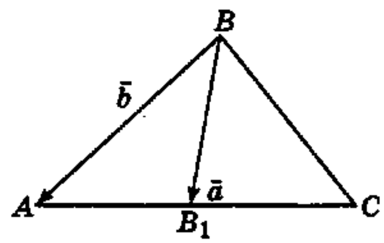
4. О т в е т: 2.

Решение. По определению длина вектора равна длине отрезка AC. Отрезок AC в прямоугольнике $ABCD$ является диагональю. Так как четырехугольник $ABCD$ — прямоугольник, то треугольник ABD — прямоугольный. По теореме Пифагора $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$ (см). Следовательно, $|\overline{AC}| = 17$ см.



5. О т в е т: 3.

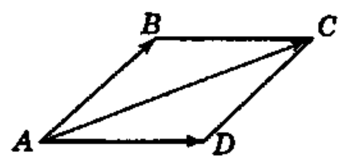
Решение. По определению разности векторов $\overline{BB_1} = \overline{BA} - \overline{B_1A}$. Так как отрезок BB_1 — медиана треугольника ABC, то $\overline{B_1A} = \frac{1}{2}\overline{CA} = \frac{1}{2}\bar{a}$. Следовательно, $\overline{BB_1} = \bar{b} - \frac{1}{2}\bar{a}$.



Часть 2

6. О т в е т: (3; −3).

Решение. Вектор $\overline{AC}$ является суммой векторов $\overline{AD}$ и $\overline{AB}$, т. е. $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{AB}$. Обозначим $\overline{AC} = \bar{c}(x_1; x_2)$, тогда $\bar{c} = \bar{b} + \bar{a}$, $x_1 = 1 + 2 = 3$, $x_2 = 0 + (-3) = -3$. Таким образом (3; −3).



7. О т в е т: $-\frac{1}{2}\overline{m}$.

Решение. По условию $|\overline{MN}| = \frac{1}{2}|\overline{m}|$ и векторы $\overline{MN}$ и $\overline{m}$ противоположно направлены, следовательно, $\overline{MN} = -\frac{1}{2}\overline{m}$.

8. О т в е т: $\overline{AB}$.

Решение. В силу переместительного закона $\overline{AK} - \overline{BC} + \overline{KC} = \overline{AK} + \overline{KC} - \overline{BC} = \overline{AC} - \overline{BC} = \overline{AB}$.

9. О т в е т: 14.

<u>Решение</u>. Пусть $\bar{c} = x\bar{a}$. Поскольку $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{c}| = 4$ и векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ сонаправленны, то $x = 2$, т. е. $\bar{c} = 2\bar{a}$. По условию $3\bar{a} - \bar{b} + 2\bar{c} = 0$, значит, $\bar{b} = 3\bar{a} + 2\bar{c} = 7\bar{a}$. Следовательно, $|\bar{b}| = 14$.

10. О т в е т: (9; 12).

<u>Решение</u>. Векторы $\overline{AC}$ и $\overline{AB}$ лежат на одной прямой и началом обоих векторов является одна и та же точка A и точка C принадлежит отрезку AB, значит, векторы $\overline{AC}$ и $\overline{AB}$ коллинеарны и сонаправленны. По условию $|\overline{AC}| : |\overline{CB}| = 2 : 1$, значит, $|\overline{AC}| : |\overline{AB}| = 2 : 3$, $\overline{AB} = \frac{3}{2}\overline{AC}$. Обозначим координаты вектора $\overline{AB}$ — $(x_1; x_2)$, тогда $x_1 = \frac{3}{2} \cdot 6 = 9$, $x_2 = \frac{3}{2} \cdot 8 = 12$. Таким образом $\overline{AC}(9; 12)$.

11. О т в е т: 90.

<u>Решение</u>. Перемножим $\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2} \cdot \frac{\bar{a}-\bar{b}}{2} = \frac{(\bar{a}+\bar{b})(\bar{a}-\bar{b})}{4} = \frac{\bar{a}^2-\bar{b}^2}{4} = \frac{|\bar{a}|^2-|\bar{b}|^2}{4}$. По условию вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имеют общее начало в вершине ромба, а их концы находятся в соседних вершинах этого ромба, то модули этих векторов равны, так как отрезки a и b являются сторонами ромба. Значит, скалярное произведение векторов $\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2} \cdot \frac{\bar{a}-\bar{b}}{2} = 0$. По следствию из теоремы о скалярном произведении векторов следует, что если скалярное произведение векторов равно нулю, то векторы перпендикулярны. Следовательно, угол между векторами $\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}$ и $\frac{\bar{a}-\bar{b}}{2}$ равен $90°$.

12. О т в е т: 3.

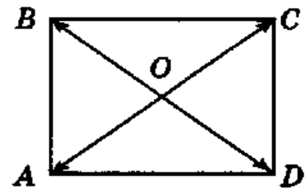
<u>Решение</u>. По условию векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ сонаправлены, т. е. угол между ними равен $0°$. По определению скалярного произведения векторов $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\alpha$, $\cos 0° = 1$, Значит, $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| = 3 \cdot 1 = 3$.

Часть 3

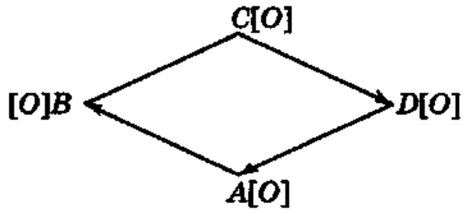
13. <u>Решение</u>. Вычтем из обеих частей вектор $\overline{OA}$, тогда $\overline{OK} - \overline{OA} = \frac{3}{5}\overline{OA} + \frac{2}{5}\overline{OC} - \overline{OA} = \frac{2}{5}\overline{OC} - \frac{2}{5}\overline{OA}$, т. е. $\overline{AK} = \frac{2}{5}\overline{AC}$. Отсюда следует, что векторы $\overline{AK}$ и $\overline{AC}$ коллинеарны, т. е. точка K лежит на отрезке AC и делит его в отношении $2 : 3$. Следовательно, $\overline{AK} = \frac{2}{3}\overline{KC}$.

14. <u>Решение</u>. Нужно от конца вектора $\vec{x}$ отложить вектор $\vec{y}$ и провести вектор из начала вектора в конец вектора $\vec{y}$, получим вектор $\vec{x} + \vec{y}$. Получим треугольник со сторонами $|\vec{x}|$, $|\vec{y}|$ и $|\vec{x} + \vec{y}|$ в силу теоремы о неравенстве треугольника $|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$.

При этом, если векторы не коллинеарны, то выполняется строгое неравенство $|\vec{x} - \vec{y}| < |\vec{x}| + |\vec{y}|$, если векторы коллинеарны, то $|\vec{x} - \vec{y}| = |\vec{x}| + |\vec{y}|$.



15. Решение. От произвольной точки плоскости отложим вектор $\overline{OA}$. От точки $A[O]$ отложим вектор, равный $\overline{OB}$. Затем отложим векторы соответственно равные $\overline{OC}$ и $\overline{OD}$.



Векторы $\overline{OA}$ и $\overline{OC}$ лежат на диагонали AC, а векторы $\overline{OB}$ и $\overline{OD}$ лежат на диагонали BD, следовательно, они попарно коллинеарны. Отсюда следует, что у полученного четырехугольника стороны попарно параллельны. Значит, полученный четырехугольник — параллелограмм. Так как диагонали прямоугольника равны и точкой пересечения делятся пополам, то стороны полученного параллелограмма равны. Следовательно, полученный параллелограмм — ромб. По правилу многоугольника сложения векторов $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = 0$.

Учебник «Геометрия. 7–9» И.Ф. Шарыгина

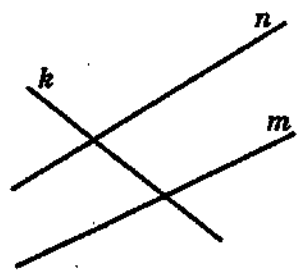
ТЕСТ 1

Вариант 1

Часть 1

1. Ответ: 1.

<u>Решение</u>. Так как сумма внутренних односторонних углов, образованных при пересечении двух прямых n и m секущей k, равна $90°$, то прямые n и m пересекаются и образуют треугольник. Сумма двух углов этого треугольника равна $90°$, значит, треугольник — прямоугольный. Следовательно, прямые n и m — перпендикулярны.



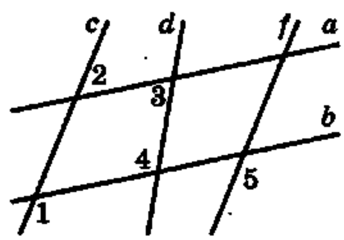
2. Ответ: 3.

<u>Решение</u>. Обозначим углы треугольника α, β и γ. Пусть $\gamma > \alpha + \beta$. По теореме о сумме углов треугольника $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Отсюда $2\gamma > 180°$, значит, $\gamma > 90°$. Следовательно, треугольник — тупоугольный.

3. Ответ: 3.

<u>Решение</u>. Угол, смежный с углом 5, является внутренним односторонним по отношению к углу 1 при прямых c и f и секущей b. По условию $\angle 1 = \angle 5$, значит, сумма угла, смежного с углом 5, и угла 1 равна $180°$. Следовательно, прямые c и f параллельны.

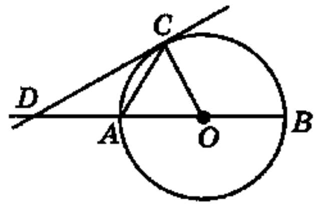
Угол, вертикальный с углом $\angle 4$, составляет с $\angle 5$ пару соответственных углов при прямых d и f и секущей b. По условию $\angle 4 \neq \angle 5$, значит, прямые d и f не параллельны. Поскольку прямые c и f параллельны, а прямые d и f не параллельны, то прямые c и d не параллельны. Следовательно, $c \parallel f \nparallel d$.



4. Ответ: 1.

<u>Решение</u>. Соединим центр окружности O с точкой касания прямой CD и окружности — точкой C. В треугольнике ACO стороны AO и CO равны как радиусы одной окружности, значит, треугольник ACO — равнобедренный, а так как $\angle CAO = 60°$, то треугольник ACO равносторонний. В треугольнике CAD: $\angle CAD = 120°$ как смежный с $\angle CAO = 60°$; $\angle DCA = \angle OCD - \angle ACO = 90° - 60° = 30°$. Значит, по теореме о сумме углов треугольника

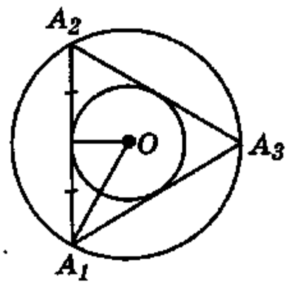
$\angle CDA = 180° - \angle CAD - \angle DCA = 30°$. Следовательно, $\angle DCA = \angle CDA$, отсюда треугольник ACD — равнобедренный.



5. Ответ: 2.

Решение. Точка пересечения биссектрис треугольника является центром окружности, вписанной в этот треугольник, а точка пересечения серединных перпендикуляров треугольника является центром окружности, описанной около этого треугольника.

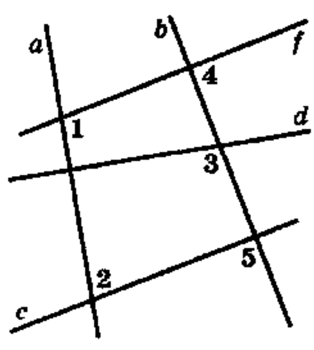
Из теоремы о медиане равнобедренного треугольника следует, что биссектриса и высота равнобедренного треугольника, проведенные к его основанию, совпадают. А из определения серединного перпендикуляра следует, что высота, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, совпадает с серединным перпендикуляром к его основанию. В равностороннем треугольнике это утверждение справедливо для всех сторон треугольника. Отсюда следует, что в равностороннем треугольнике биссектрисы углов совпадают с серединными перпендикулярами. Значит, в равностороннем треугольнике центр вписанной в треугольник окружности совпадает с центром описанной около него окружности. Следовательно, данный треугольник — равносторонний.



Часть 2

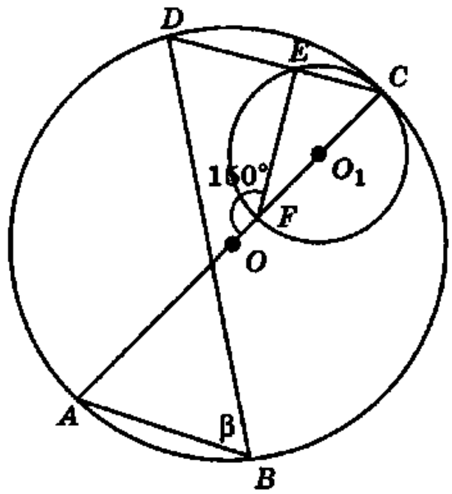
6. Ответ: 97.

Решение. Углы $\angle 1$ и $\angle 2$ являются внутренними односторонними при параллельных прямых f и c и секущей a, и так как $\angle 1 + \angle 2 = 108° + 72° = 180°$, следовательно, прямые f и c — параллельны. Введем дополнительное обозначение на рисунке: угол 6, вертикальный углу 5, $\angle 6 = \angle 5 = 83°$. Углы $\angle 4$ и $\angle 6$ является внутренними односторонними при параллельных прямых f и c и секущей b, значит, $\angle 4 = 180° - \angle 6 = 180° - 83° = 97°$, Следовательно, $\angle 4 = 97°$.



7. О т в е т: 60.

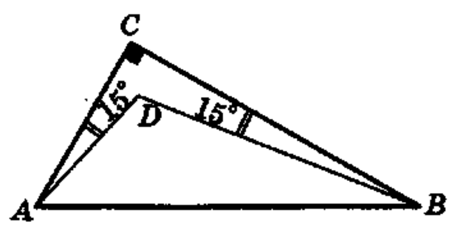
<u>Решение</u>. Треугольник FEC — вписанный в окружность с центром в точке O_1, причем центр O_1 лежит на стороне CF треугольника FEC. Отсюда треугольник FEC — прямоугольный, в котором вписанный $\angle CFE = 30°$, как смежный с углом AFE. Значит, по теореме о сумме углов треугольника $\angle FCE = 60°$. Точка C — общая для обеих окружностей, значит, $\angle FCE$ является вписанным и в окружность с центром в точке O, т. е. это угол DCA. Таким образом, в окружности с центром в точке O вписанные углы DCA и ABD опираются на одну дугу. Значит, $\angle ABD = \angle DCA = \beta = 60°$.



8. О т в е т: 120.

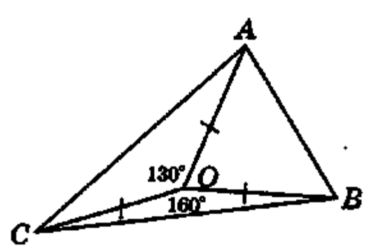
<u>Решение</u>. По теореме о сумме углов треугольника $\angle ACB + \angle ABC + \angle BAC = 180°$. Так как треугольник ABC — прямоугольный, то $\angle ABC + \angle BAC = 180° - \angle ACB = 90°$.

В треугольнике ADB: $\angle DAB + \angle DBA = (\angle ABC + \angle BAC) - (\angle CAD + \angle CBD) = 90° - 30° = 60°$. Следовательно, $\angle ADB = 180° - (\angle DAB + \angle DBA) = 120°$.



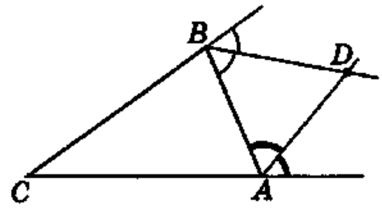
9. О т в е т: 35.

<u>Решение.</u> По условию $OA = OB = OC$, значит, точки A, B и C равноудалены от точки O, т. е. лежат на окружности с центром в точке O. Угол AOB является центральным углом, равен $70°$ и опирается на дугу, стягиваемую хордой AB. Угол ACB является вписанным углом и опирается на ту же дугу, стягиваемую хордой AB, что и угол AOB. Следовательно, $\angle ACB$ по теореме об измерении вписанных углов равен $35°$.



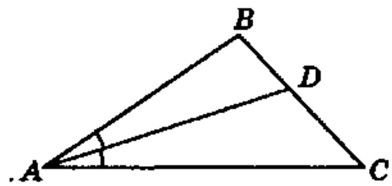
10. Ответ: $\angle ACB = 40$.

<u>Решение</u>. По теореме о сумме углов треугольника ABD: $\angle ABD + \angle BAD + \angle BDA = 180°$, откуда $\angle ABD + \angle BAD = 180° - 70° = 110°$. Так как лучи AD и BD — биссектрисы внешних углов при вершинах B и A треугольника ABC, то сумма внешних углов треугольника ABC при вершинах B и A равна $220°$. Так как внутренний и внешний углы при одной вершине — смежные и равны $180°$, то сумма углов при вершинах B и A треугольника ABC равна $140°$. Следовательно, $\angle ACB = 180° - (\angle ABC + \angle BAC) = 40°$.



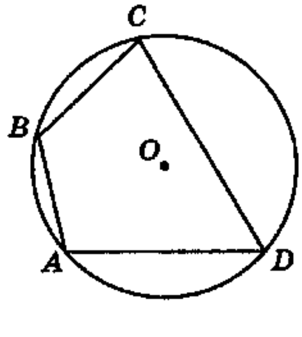
11. Ответ: 45.

<u>Решение.</u> Обозначим угол BAC треугольника ABC через α. Так как треугольник ABC — равнобедренный, то $\angle BCA = \angle BAC = \alpha$, а по условию $\angle ABC = 4\angle BAC = 4\alpha$. По теореме о сумме углов треугольника $\angle BCA + \angle BAC + \angle ABC = \alpha + \alpha + 4\alpha = 6\alpha = 180°$, $\alpha = 30°$. Значит, $\angle ABC = 120°$. В треугольнике BFA: $\angle ABC = 120°$, $\angle BAF = 15°$, так как отрезок AD — биссектриса $\angle BAC$. Следовательно, по теореме о сумме углов треугольника $\angle BDA = 45°$.



12. Ответ: 120.

<u>Решение</u>. Пусть для определенности $\cup BC : \cup CD : \cup DA : \cup AB = 3 : 7 : 5 : 3$. Таким образом, вся окружность разделена на 18 частей, отсюда $\cup AB = 60°$, $\cup BC = 60°$, $\cup CD = 140°$ и $\cup DA = 100°$. Так как все вершины четырехугольника $ABCD$ лежат на окружности, то все его углы вписанные. Угол BCD опирается на дугу DAB, равную сумме дуг AB и AD, $\cup BAD = \cup AB + \cup AD = 60° + 100° = 160°$. Угол DAB опирается на дугу, дополняющую дугу BAD до $360°$, т. е. дугу BCD, равную $200°$. Угол ADC опирается на дугу ABC, равную сумме дуг AB и BC, $\cup ABC = \cup AB + \cup BC = 60° + 60° = 120°$. Угол ABC опирается на дугу, дополняющую дугу ABC до $360°$, т. е. дугу ADC, равную $240°$. Таким образом, на наибольшую дугу ADC, равную $240°$, опирается $\angle ABC$, следовательно, $\angle ABC = 120°$.

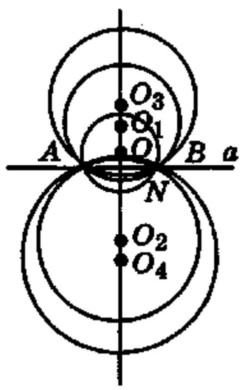


Часть 3

13. Решение. Пусть точки A и B прямой a, через которые проходит окружность с центром в точке O. Отрезки OA и OB равны, как радиусы одной окружности. Значит, точка O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB. Обозначим середину отрезка точкой N.

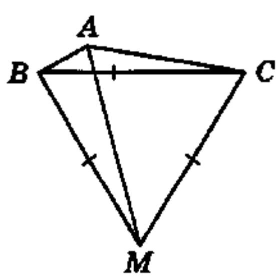
1. Каждая точка серединного перпендикуляра O к отрезку AB является центром окружности, проходящая через точки A и B прямой a. Пусть точка O_1 лежит на прямой ON. Проведем окружность с центром в точке O_1 радиусом, равным O_1A. Так как точка O_1 лежит на прямой ON, то треугольники AON и BON равны как прямоугольные треугольники по двум катетам. Значит, отрезки OA и OB равны, а следовательно, окружность с центром в точке O_1 проходит через точку B.

2. Если окружность проходит через точки A и B прямой a, то ее центр лежит на прямой ON. Пусть точка O_2 — центр окружности, проходящей через точки A и B прямой a, не лежит на прямой ON, тогда через точку N прямой a проведены два перпендикуляра ON и O_2N, что противоречит теореме о единственности перпендикуляра, проведенного через данную точку прямой a. Следовательно, прямые ON и O_2N совпадают, т. е. точка O_2 принадлежит прямой ON.



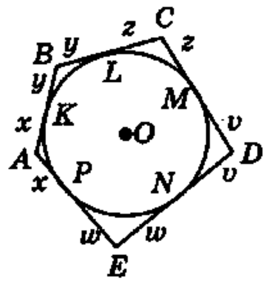
14. Ответ: 70.

Решение. Так как треугольник CMB — равносторонний, то $\angle BMC = \angle MCB = \angle MBC = 60°$. Около треугольника ABC можно описать окружность. По условию $\angle ABC = 20°$, а $\angle ACB = 10°$, значит, $\angle BAC = 150°$, а дуга BAC равна $60°$. Угол BMC, равный $60°$, опирается на эту дугу, следовательно, угол BMC является центральным по отношению к углу BAC, а точка M — центром окружности, описанной около треугольника ABC. Отсюда, $AM = BM = CM$, и треугольник CMA — равнобедренный. Отсюда следует, что $\angle MAC = \angle MCA$, $\angle ABM = \angle ACB + \angle MCB = 10° + 60° = 70°$. Отсюда угол MAB равен $70°$.



15. Ответ: 1,5 и 3,5.

Решение. Касательные, проведенные из одной точки к окружности равны. Обозначим касательные, выходящие из вершины A, через x, из вершины B — y, из вершины C — z, из вершины D — v, из вершины E — w. Тогда $AB = x + y = 5$, $BC = y + z = 6$, $CD = z + v = 7$, $DE = v + w = 8$, $AE = w + x = 9$. Отсюда $y = 5 - x$, $z = 6 - (5 - x) = 1 + x$, $v = 7 - (1 + x) = 6 - x$, $w = 8 - (6 - x) = 2 + x$. Значит, сторона $AE = w + x = 2 + x + x = 2 + 2x = 9$, $x = 3{,}5$. Следовательно, точка касания K делит сторону AB на отрезки $AK = 3{,}5$ и $BK = 1{,}5$.

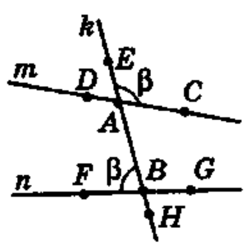


Вариант 2

Часть 1

1. Ответ: 2.

Решение. Угол DAB является вертикальным по отношению к углу EAC и, значит, равен β. С другой стороны углы DAB и FBA составляют пару внутренних односторонних углов при прямых n и m и секущей k. Отсюда следует, что внутренние односторонние углы при пересечении прямых n и m секущей k – тупые и каждый равен $130°$. Поэтому прямые n и m пересекаются и образуют треугольник, одна сторона которого AB. Угол CAB — смежный с углом DAB, значит, равен $50°$, угол ABG — смежный с углом ABF и тоже равен $50°$. Получили, что углы, прилежащие к стороне AB равны, значит, полученный треугольник – равнобедренный, а угол при вершине равен $80°$. Следовательно, прямые n и m пересекаются, но не перпендикулярны.



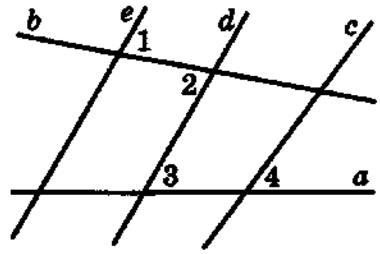
2. Ответ: 2.

Решение. Обозначим углы треугольника α, β и γ. Пусть $\gamma = \alpha + \beta$. По теореме о сумме углов треугольника $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Отсюда $2\gamma = 180°$. Значит, $\gamma = 90°$. Следовательно, треугольник — прямоугольный.

3. Ответ: 1.

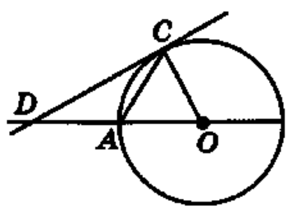
Решение. Так как углы $\angle 1$ и $\angle 2$ являются внутренними накрест лежащими и равны друг другу, то прямые e и d параллельны.

Угол, смежный с углом 4, является внутренним односторонним по отношению к углу 3 при прямых c и d и секущей a. По условию $\angle 3 \neq \angle 4$, значит, сумма угла, внутреннего одностороннего с углом 3, и угла 3 не равна 180°. Следовательно, прямые *c* и *d* не параллельны. Поскольку прямые *e* и *d* параллельны, а прямые *d* и *c* не параллельны, то прямые *e* и *c* не параллельны.



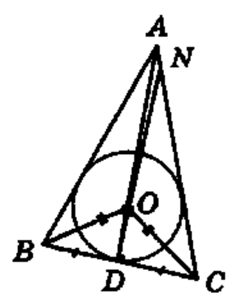
4. **О т в е т:** 3.

Решение. Соединим центр окружности O с точкой касания прямой CD и окружности — точкой C. В треугольнике ACO стороны AO и CO равны как радиусы одной окружности, значит, треугольник ACO — равнобедренный и $\angle CAO = \angle ACO = 70°$. В треугольнике CAD $\angle CAD = 110°$, как смежный с $\angle CAO = 70°$. $\angle DCA = \angle DCO - \angle ACO = 90° - 70° = 20°$. Значит, по теореме о сумме углов треугольника $\angle CDA = 180° - \angle CAD - \angle DCA = 50°$. Следовательно, в треугольнике DCA все углы — разные, отсюда треугольник ACD — разносторонний.



5. **О т в е т:** 1.

Решение. В треугольнике ABC к стороне BC проведен серединный перпендикуляр ND, $ND \perp BC$ и $BD = CD$. Центр вписанной окружности (точка O) лежит на серединном перпендикуляре ND. Рассмотрим треугольники BOD и COD. Так как отрезок OD лежит на серединном перпендикуляре, то треугольники BOD и COD прямоугольные и катеты BD и CD равны, OD — общий катет. Значит, треугольники BOD и COD равны по двум катетам. Из равенства треугольников следует равенство $BO = CO$ и соответствующих углов $\angle OBD = \angle OCD$. Центр вписанной окружности является точкой пересечения биссектрис треугольника, значит OB и OC — биссектрисы углов ABD и ACD, из равенства $\angle OBD = \angle OCD$ следует $\angle ABD = \angle ACD$. Следовательно, треугольник ABC — равнобедренный.

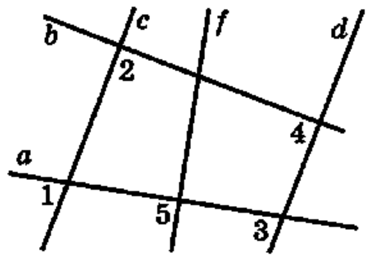


Часть 2

6. Ответ: 97.

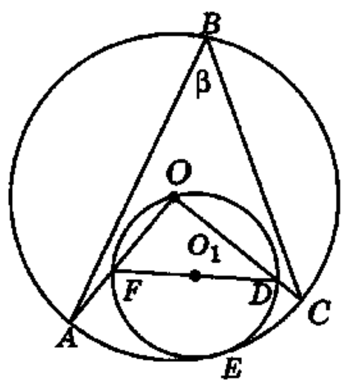
Решение. Углы $\angle 2$ и $\angle 4$ являются односторонними при параллельных прямых c и d и секущей b, и так как $\angle 2 + \angle 4 = 90° + 90° = 180°$, следовательно, прямые c и d — параллельны.

Углы $\angle 1$ и $\angle 3$ является соответственными при параллельных прямых c и d и секущей a, значит, $\angle 1 = \angle 3 = 97°$.



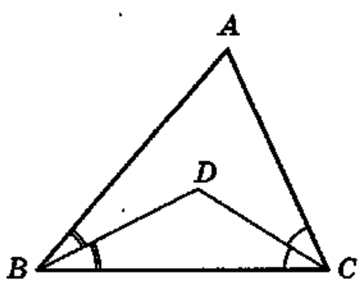
7. Ответ: 45.

Решение. Треугольник FOD — вписанный в окружность с центром в точке O_1, причем, центр O_1 лежит на стороне FD треугольника FOD. Отсюда треугольник FOD — прямоугольный, в котором $\angle FOD = 90°$ как вписанный угол, опирающийся на диаметр. Угол FOD для окружности с центром в точке O является центральным углом AOC. Таким образом, в окружности с центром в точке O центральный угол AOC и вписанный угол ABD опираются на одну дугу. Значит, по теореме о вписанном угле $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = 45°$.



8. Ответ: 122.

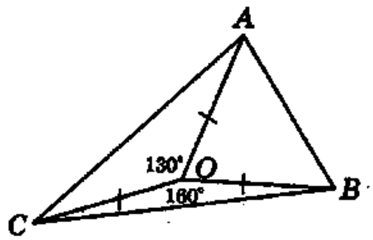
Решение. По теореме о сумме углов треугольника $\angle ACB + \angle ABC + \angle BAC = 180°$, значит, $\angle ACB + \angle ABC = 180° - \angle BAC = 180° - 64° = 116°$. Так как отрезки BD и CD — биссектрисы углов ABC и BAC, то сумма углов CBD и BCD равна половине суммы углов ABC и BAC, т. е. $58°$. По теореме о сумме углов треугольника в треугольнике BDC $\angle CDB = 180° - (\angle CBD + \angle BCD) = 180° - 58° = 122°$.



9. О т в е т: 70.

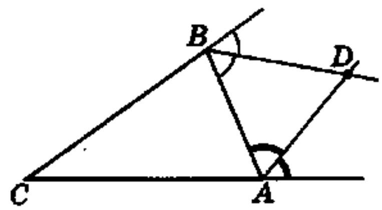
Решение. По условию $OA = OB = OC$, значит, точки A, B и C равноудалены от точки O, т. е. лежат на окружности с центром в точке O. Угол ACB является вписанным углом и опирается на дугу, стягиваемую хордой AB. По теореме о сумме углов треугольника $\angle ABC = 35°$. Угол AOB является центральным углом и опирается на ту же дугу, что и угол ACB.

Следовательно, $\angle AOB$ по теореме об измерении вписанных углов равен $70°$.



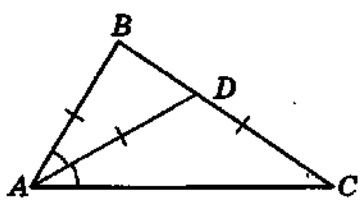
10. О т в е т: 76.

Решение. По теореме о сумме углов треугольника ABC $\angle ABC + \angle BAC + \angle BCA = 180°$, откуда $\angle BAC + \angle BCA = 180° - 28° = 152°$. Так как внутренний и внешний углы при одной вершине — смежные и равны $180°$, то сумма внешних углов треугольника ABC равна $208°$. Так как лучи AD и BD — биссектрисы внешних углов при вершинах B и A треугольника ABC, значит, сумма углов ABD и BAD треугольника ABD равна $104°$. По теореме о сумме углов треугольника $\angle CAD + \angle ACD + \angle BDA = 180°$. Следовательно, $\angle BDA = 180° - (\angle CAD + \angle ACD) = 76°$.



11. О т в е т: 72.

Решение. Обозначим угол BAC треугольника ABC через 2α, тогда $\angle DAC = \angle DAB = \alpha$, так как отрезок AD — биссектриса $\angle BAC$. Треугольник ADC — равнобедренный, по условию $AD = DC$, значит, $\angle DAC = \angle ACD = \alpha$. По теореме о внешнем угле треугольника $\angle ADB = 2\alpha$, а так как треугольник ADB равнобедренный, по условию $AD = AB$, то $\angle ADB = \angle ABD = 2\alpha$. Значит, по теореме о сумме углов треугольника $\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 2\alpha + 2\alpha + \alpha = 180°$, $5\alpha = 180°$, $\alpha = 36°$. Следовательно, $\angle ABC = 72°$.

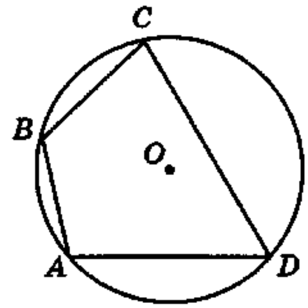


12. О т в е т: 65.

Решение. Пусть для определенности $\cup AB = 56°$, $\cup BC = 74°$, $\cup CD = 97°$ и $\cup DA = 133°$. Так как все вершины четырехугольника $ABCD$ лежат на окружности, то все его углы вписанные. Угол BCD опирается на дугу BAD, равную сумме дуг AB и AD, $\cup BAD = \cup AB + \cup AD = 56° + 133° = 189°$. Угол DAB опирается на дугу, дополняющую дугу BAD до $360°$, т. е. дугу BCD, равную $171°$.

6-3364и

Угол ADC опирается на дугу ABC, равную сумме дуг AB и BC, $\cup ABC = \cup AB + \cup BC = 56° + 74° = 130°$. Угол ABC опирается на дугу, дополняющую дугу ABC до $360°$, т. е. дугу ADC, равную $230°$. Таким образом, на наименьшую дугу ABC, равную $130°$, опирается $\angle ADC$, следовательно, $\angle ADC = 65°$.

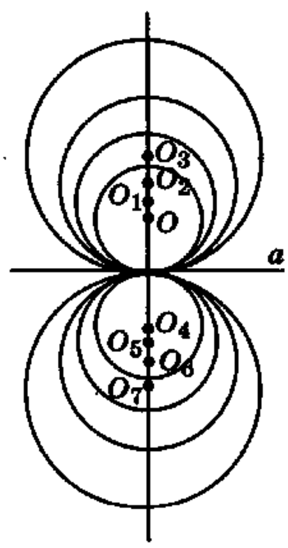


Часть 3

13. Решение. Пусть Q точка касания прямой a и окружности с центром в точке O. Соединим точки O и Q. Прямая OQ перпендикулярна прямой a, так как Q — точка касания.

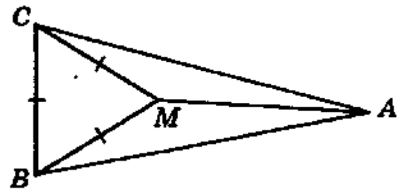
1. Каждая точка прямой OQ является центром окружности, касающейся прямой a в точке Q. Пусть точка O_1 лежит на прямой OQ. Проведем окружность с центром в точке O_1 радиусом, равным O_1Q. Так как точка O_1 лежит на прямой OQ, а прямая OQ, перпендикулярна прямой a, то окружность с центром в точке O_1 касается прямой a, что следует из определения касательной.

2. Если окружность касается прямой a в точке Q, то ее центр лежит на прямой OQ. Пусть точка O_2 — центр окружности, касающейся прямой a в точке Q, не лежит на прямой OQ, тогда к прямой a проведены два перпендикуляра OQ и O_2Q, что противоречит теореме о единственности перпендикуляра, проведенного через данную точку прямой a. Следовательно, прямые OQ и O_2Q совпадают, т. е. точка O_2 принадлежит прямой OQ.



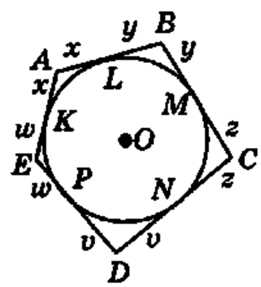
14. Ответ: 20.

Решение. По условию $\angle ABC = 80°$, а $\angle ACB = 70°$, значит, $\angle ABC + \angle ACB = 150°$ и $\angle BAC = 30°$. Так как треугольник CMB — равносторонний, то $\angle BMC = 60°$. Около треугольника ABC можно описать окружность. В этой окружности вписанный угол BAC, равный $30°$, опирается на дугу BC. На эту же дугу BC опирается угол BMC, равный $60°$. Значит, угол BMC является центральным по отношению к углу BAC, а точка M – центром окружности, описанной около треугольника ABC. Следовательно, $AM = BM = CM$, и треугольник BMA — равнобедренный. Отсюда следует, что $\angle MAB = \angle ABM$, $\angle ABM = \angle ABC - \angle CBM = 80° - 60° = 20°$. Отсюда угол MAB равен $20°$.



15. <u>Решение.</u> Предположим, что стороны данного пятиугольника $ABCDE$ касаются некоторой окружности с центром в точке O. Касательные, проведенные из одной точки к окружности, равны. Обозначим касательные, выходящие из вершины A, через x, из вершины B — y, из вершины C — z, из вершины D — v, из вершины E — w. Тогда $AB = x + y = 6$, $BC = y + z = 8$, $CD = z + v = 7$, $DE = v + w = 9$, $AE = w + x = 4$. Отсюда $y = 6 - x$, $z = 8 - (6 - x) = 2 + x$, $v = 7 - (2 + x) = 5 - x$, $w = 9 - (5 - x) = 4 + x$. Значит, сторона $AE = w + x = 4 + x + x = 4 + 2x = 4$, $x = 0$.

Пришли к противоречию, точка касания L делит сторону AB на отрезки $AL = 0$ и $BL = 4$, что невозможно, так как точка L является внутренней точкой отрезка AB.



ТЕСТ 2

Вариант 1

Часть 1

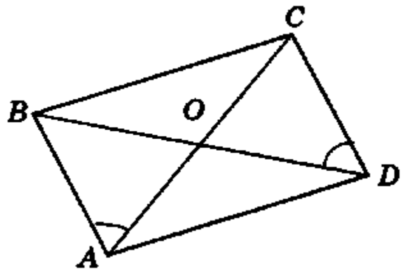
1. Ответ: 4.

<u>Решение</u>. Тройка чисел 6, 9, 12 пропорциональна числам 2, 3 и 4, так как $\frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \frac{12}{4} = 3$.

2. Ответ: 2.

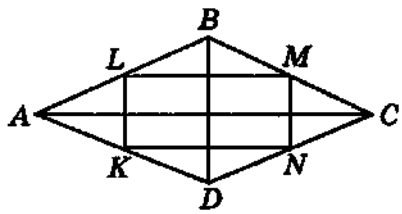
<u>Решение</u>. Обозначим точку пересечения диагоналей буквой O. По условию в четырехугольнике $ABCD$: $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$, значит, четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм. Углы BAC и ACD равны как накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD и секущей AC. Углы CDB и ABD равны как накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD и секущей BD. Следовательно, $\angle BAC = \angle ACD = \angle CDB = \angle ABD$, а, значит, треугольники AOB и COD — равнобедренные. По свойству диагоналей

параллелограмма $AO = CO$ и $OB = OD$, а так как $\triangle AOB$ — равнобедренный, то $AO = OB$. Значит, диагонали параллелограмма равны. Следовательно, параллелограмм $ABCD$ — прямоугольник. Прямоугольник $ABCD$ не является квадратом, так как у квадрата угол между стороной и диагональю равен $45°$, а по условию углы BAC и CDB равны $67°$.



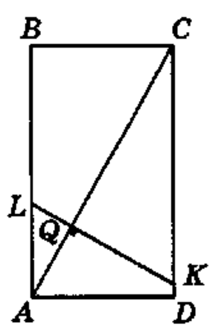
3. Ответ: 3.

<u>Решение</u>. Стороны четырехугольника $KLMN$, вершинами какого являются середины сторон ромба $ABCD$, попарно параллельны его диагоналям по теореме о средней линии треугольника. Стороны KL и MN параллельны его диагонали BD, а стороны LM и KN параллельны диагонали AC. Следовательно, четырехугольник $KLMN$ — параллелограмм. Так как диагонали AC и BD ромба перпендикулярны, то углы параллелограмма прямые, т. е. параллелограмм $KLMN$ — прямоугольник. Ромб $ABCD$ отличен от квадрата, значит, его диагонали AC и BD не равны, поэтому не равны и соседние стороны KL и LM прямоугольника. Следовательно, прямоугольник $KLMN$ не является квадратом.



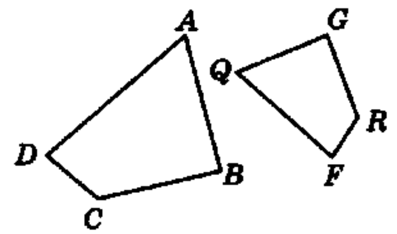
4. Ответ: 2.

<u>Решение</u>. Рассмотрим треугольники ABC и CQK. По условию, $ABCD$ — прямоугольник, отсюда $\angle ABC$ — прямой; отрезок KL перпендикулярен диагонали AC, значит, $\angle CQK$ — прямой. Таким образом, треугольники ABC и CQK — прямоугольные. Углы BAC и QCK равны как накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD и секущей AC. Следовательно, прямоугольные треугольники ABC и CQK подобны. Так как, $AB : BC = 4 : 3$, то и $CQ : QK = 4 : 3$, значит, $QK = 12$ (см).



5. Ответ: 18.

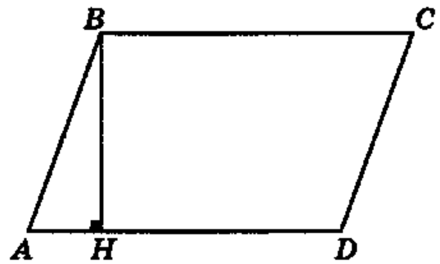
<u>Решение</u>. По условию четырехугольники *QGRF* и *ABCD* подобны и их коэффициент подобия равен $k = \frac{3}{5}$. Значит, $P_{QGRF} = P_{ABCD}$ или $P_{ABCD} = \frac{3}{5}P_{QGRF}$. По условию, $P_{ABCD} - P_{QGRF} = 12$ см, т. е. $P_{QGRF} = \frac{3}{5}P_{QGRF} - 12$, отсюда, $\frac{2}{3}P_{QGRF} = 12$, $P_{QGRF} = 18$ см.



Часть 2

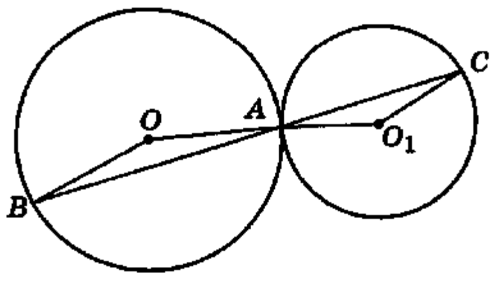
6. Ответ: 135.

<u>Решение</u>. Треугольник *ABH* — прямоугольный, по условию *BH* — высота параллелограмма *ABCD*, и равнобедренный. Из теоремы о сумме углов треугольника следует, что острый угол прямоугольного равнобедренного треугольника равен 45°. В параллелограмме сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна 180°, значит, $\angle ADC = 135°$.



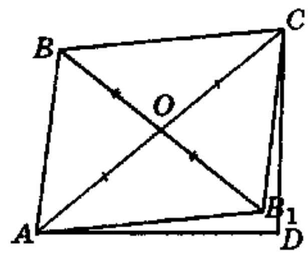
7. Ответ: 15.

<u>Решение</u>. Соединим точки *O* и O_1 — центры окружностей. По условию окружности с центрами *O* и O_1 касаются внешним образом в точке *A*, значит, по определению внешнего касания окружностей точка *A* принадлежит отрезку OO_1. Равнобедренные треугольники *AOB* и AO_1C подобны, так как углы *OAB* и O_1AC — вертикальные, следовательно, равные. Стороны *OB* и O_1C — соответственные и являются радиусами окружностей с центрами *O* и O_1. Значит, коэффициент подобия треугольников *AOB* и AO_1C равен 3, ($OB = 9$ см, $O_1C = 3$ см). В силу теоремы об отношении соответствующих линейных элементов двух подобных треугольников, $AB = 3AC$, так как стороны *AB* и *AC* — соответственные. Следовательно, $AB = 3AC = 15$ см.



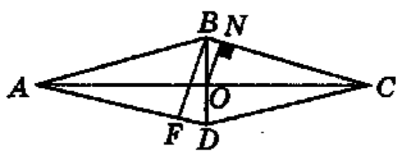
8. О т в е т: 7.

Решение. Соединим точку B с точкой O и отложим на прямой BO от точки O отрезок OB_1, равный отрезку BO. Тогда в четырехугольнике $ABCD$: $AO = CO$ по условию и $BO = B_1O$ по построению. Следовательно, четырехугольник $ABCB_1$ — параллелограмм. Отсюда, по свойству параллелограмма $\angle ABC = \angle AB_1C$, а по условию $\angle ABC = \angle ADC$, отсюда, $\angle AB_1C = \angle ADC$. Значит, точки B_1 и D совпадают и $ABCD$ — параллелограмм. По свойству сторон параллелограмма $AD = BC = 7$ см.



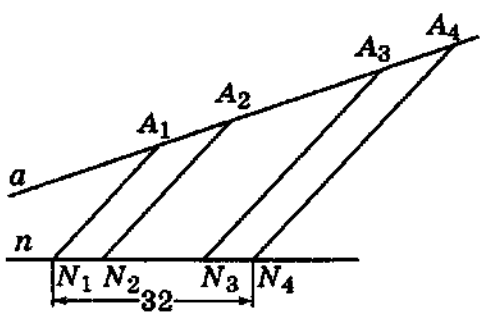
9. О т в е т: 48.

Решение. По условию расстояние ON равно 3 см, значит, расстояние между противолежащими сторонами ромба равно 6 см. Проведем высоту BF ромба. В прямоугольном треугольнике AFB угол BAF равен 30°. По свойству прямоугольного треугольника, один угол которого равен 30°, $AB = 2BF = 12$ см. Следовательно, $P_{ABCD} = 4AB = 48$ см.



10. О т в е т: 24.

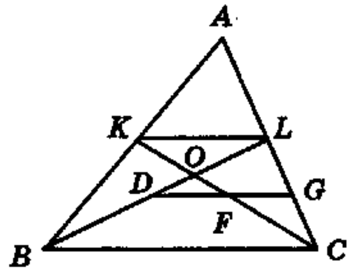
Решение. Из теоремы Фалеса следует, что если параллельные прямые A_1N_1, A_2N_2, A_3N_3 и A_4N_4 пересекают прямые a и n и при этом $A_1A_2 : A_2A_3 : A_3A_4 = 1 : 2 : 1$, то $N_1N_2 : N_2N_3 : N_3N_4 = 1 : 2 : 1$. Отрезок N_1N_4 разделен на четыре равные части, значит, одна часть равна 8 см. Отсюда N_1N_3 равен трем частям $N_1N_3 = 24$ см.



11. О т в е т: 4.

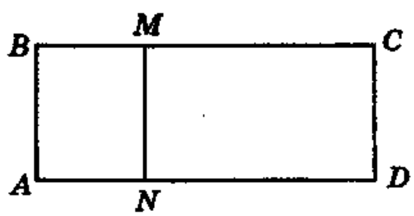
Решение. Обозначим середины медиан BL и CK точками D и F соответственно. Соединим точки K и L, тогда отрезок KL — средняя линия треугольника ABC, поэтому $KL = \frac{1}{2}BC = 8$ см.

Через точку D проведем прямую, параллельную BC, до пересечения со стороной AC в точке G. По теореме Фалеса точка G — середина CL, т. е. отрезок DG — средняя линия треугольника BLC, поэтому, $DG = \frac{1}{2}BC = 8$ см. Кроме того, так как $DG \parallel KL$, то отрезок DG содержит точку F. Следовательно, отрезок FG — средняя линия треугольника CKL, поэтому, $FG = \frac{1}{2}KL = 4$ см. Таким образом, $DF = DG - FG = 4$ см.



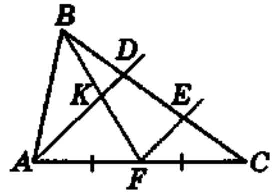
12. Ответ: 17,6.

Решение. По условию дан прямоугольник $ABCD$, в котором проведен отрезок MN, параллельный одной из сторон прямоугольника. Отрезок MN может быть параллелен только меньшей стороне прямоугольника $ABCD$. В противном случае в двух подобных прямоугольниках были бы равные стороны, что возможно только в случае, когда коэффициент подобия равен 1, т. е. прямоугольники равны. В данном случае это не так, поскольку требуется найти большую сторону большего из полученных прямоугольников. Значит, равных прямоугольников нет. Для определенности обозначим прямоугольник, подобный прямоугольнику $ABCD$, как $ABMN$. По условию, стороны данного прямоугольника $ABCD$ равны 8 см и 20 см, т. е. $AB : BC = 2 : 5$. Следовательно, в силу утверждения "отношение отрезков в одной фигуре равно отношению соответствующих отрезков в подобной фигуре" и в подобном ему прямоугольнике $ABMN$ стороны относятся также, т. е. $BM : AB = 2 : 5$. Так как AB равно 6 см, то BM равно 2,4 см. Отсюда, стороны прямоугольника $ABMN$ равны 6 см и 2,4 см, а стороны прямоугольника $NMCD$ равны 6 см и 17,6 см. Следовательно, прямоугольник $NMCD$ — больший и его большая сторона равна 17,6 см.



Часть 3

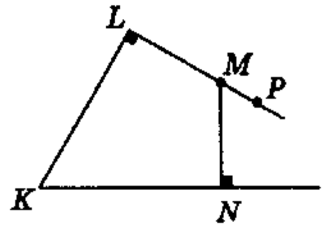
13. Решение. Через точку F проведем прямую, параллельную AD. Она пересекает сторону BC в точке E. Тогда, по теореме Фалеса, параллельные прямые AD и FE, пересекающие стороны угла FBC, отсекают на стороне BC равные отрезки BK и KF. Следовательно, точка K является серединой медианы BF.



14. Ответ: 36.

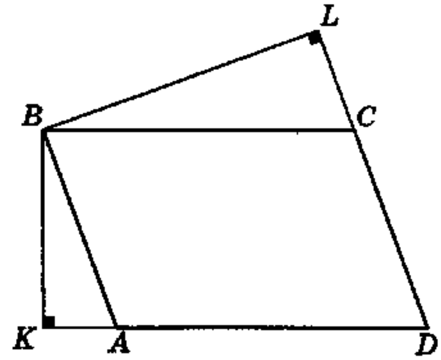
<u>Решение</u>. Сначала докажем, что "углы с взаимно перпендикулярными сторонами либо равны, либо дополняют друг друга до 180°" (рис. а).

а)



Внутри угла LKN отметим точку M и опустим из нее перпендикуляры ML и MN к сторонам угла соответственно. Точка M отмечена внутри угла LKN, значит, она лежит с лучом KL в одной полуплоскости относительно прямой KN. Поэтому отрезки KL, LM и MN лежат в одной полуплоскости относительно прямой KN. Аналогично доказывается, что отрезки KL, LM и MN лежат в одной полуплоскости относительно прямой KL. Следовательно, четырехугольник $KLMN$ — выпуклый.

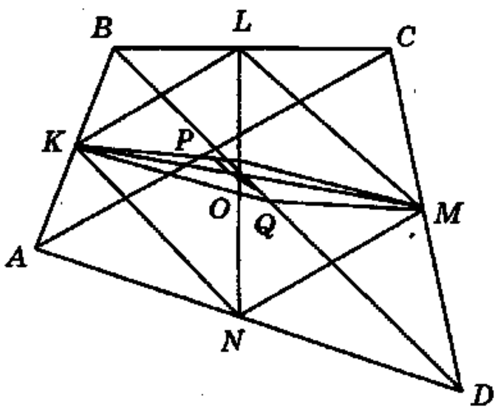
б)



Сумма углов выпуклого четырехугольника равна 360°, каждый из углов KLM и KNM равен 90°, так как ML и MN перпендикулярны сторонам угла. Значит, углы LKN и LMN дополняют друг друга до 180°, а углы LKN и NMP равны.

Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ (рис. б). Углы LBK и ADC со взаимно перпендикулярными сторонами, значит, $\angle ADC$ дополняет $\angle LBK$ до 180°. По свойству углов параллелограмма $\angle ABC = \angle ADC$. Значит, $\angle LBK = 4\angle ABC$, $\angle ABC + \angle LBK = \angle ABC + 4\angle ABC = 180°$, $\angle ABC = 36°$.

15. <u>Решение</u>. Пусть дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, в котором точки K, L, M и N — середины сторон AB, BC, CD и DA соответственно, а точки P и Q — середины диагоналей AC и BD.



В треугольнике ABC KL — средняя линия, поэтому, $KL \parallel AC$ и $KL = \frac{1}{2}AC$. Аналогично, MN — средняя линия треугольника ADC, поэтому, $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2}AC$. Таким образом, $KLMN$ — параллелограмм (по признаку), следовательно, его диагонали KM и LN пересекаются в некоторой точке O и делятся в ней пополам.

Рассмотрим четырехугольник $KPMQ$. Отрезки KP и MQ являются средними линиями треугольников ABC и DBC, поэтому, $KP \parallel BC \parallel MQ$ и $KP = \frac{1}{2}BC = MQ$. Следовательно, $KPMQ$ — параллелограмм (по признаку), значит, его диагональ PQ проходит через середину диагонали KM, т. е. через точку O и делится этой точкой пополам.

Значит, точка пересечения отрезков KM и LN совпадает с серединой отрезка PQ, что и требовалось доказать.

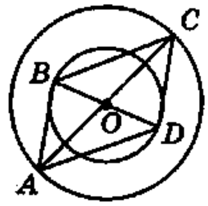
Вариант 2

Часть 1

1. Ответ: 2.

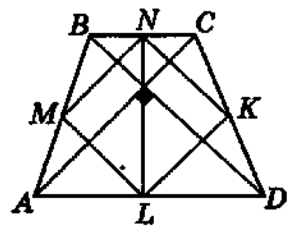
<u>Решение</u>. Тройка чисел 2, 8, 10 пропорциональна числам 1, 4 и 5, так как $\frac{2}{1} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5} = 2$.

2. О т в е т: 1.



Решение. Соединим последовательно точки A, B, C и D, тогда диаметры AC и BD концентрических окружностей будут диагоналями четырехугольника $ABCD$, при этом они точкой пересечения O делятся пополам, значит, $ABCD$ — параллелограмм. По условию $\angle AOB = 45°$, значит, диаметры окружностей не перпендикулярны и параллелограмм $ABCD$ — не ромб. По условию диагонали четырехугольника $ABCD$ не равны, значит $ABCD$ — не прямоугольник.

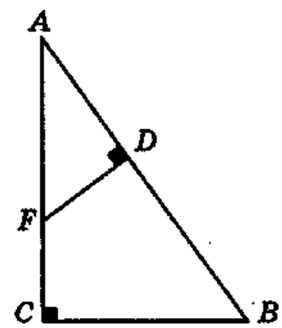
3. О т в е т: 3.



Решение. Стороны четырехугольника $KLMN$ являются средними линиями треугольников, основания которых — диагонали трапеции. Значит, диагонали четырехугольника $KLMN$ попарно параллельны. Стороны KL и MN параллельны диагонали AC, а стороны LM и KN параллельны диагонали BD. Следовательно, четырехугольник $KLMN$ — параллелограмм. Так как диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ перпендикулярны, то все углы параллелограмма $KLMN$ — прямые.

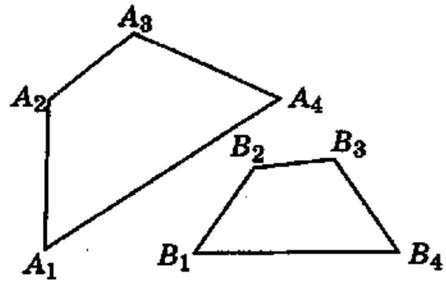
Следовательно, параллелограмм $KLMN$ — прямоугольник. Так как трапеция $ABCD$ — равнобедренная, то ее диагонали AC и BD равны. Значит, стороны прямоугольника $KLMN$ также равны. Следовательно, прямоугольник $KLMN$ является квадратом.

4. О т в е т: 2.



Решение. Рассмотрим треугольники ABC и AFD. По условию, ΔABC — прямоугольный; отрезок DF перпендикулярен гипотенузе AB, значит, $\angle QCK$ — прямой. Таким образом, треугольник AFD также прямоугольный. Угол BAC — общий. Следовательно, прямоугольные треугольники ABC и CQK подобны. В прямоугольном треугольнике ABC $AB = 16$ см и $BC = 12$ см, значит, $AB : BC = 4 : 3$, но тогда и $AF : DF = 4 : 3$, значит, $AF = 8$ см.

5. О т в е т: 4.

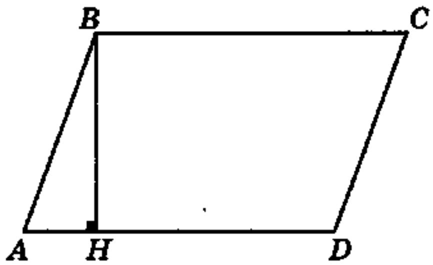


Решение. По условию четырехугольники $A_1A_2A_3A_4$ и $B_1B_2B_3B_4$ подобны и при этом стороны A_1A_4 и B_1B_4 сходственные. Кроме того, $P_{A_1A_2A_3A_4} : A_1A_4 = 5 : 2$. Следовательно, так как "отношение отрезков в одной фигуре равно отношению соответствующих отрезков в подобной фигуре", то $P_{B_1B_2B_3B_4} : B_1B_4 = 5 : 2$ или $P_{B_1B_2B_3B_4} : B_1B_4 = 2 : 5$.

Часть 2

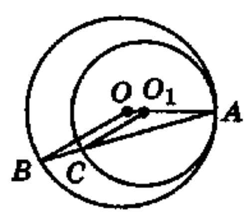
6. Ответ: 135.

Решение. Треугольник ABH — прямоугольный, по условию BH — высота параллелограмма $ABCD$. Катет BH в два раза меньше гипотенузы AB (по свойству параллелограмма $AB = CD$), значит, угол, противолежащий катету BH равен $30°$. В параллелограмме сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна $180°$, значит, $\angle ABC = 150°$.



7. Ответ: 24.

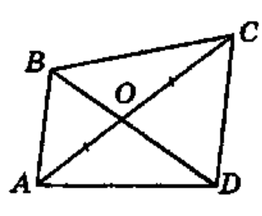
Решение. Соединим точки O и O_1 — центры окружностей. По условию, окружности с центрами O и O_1 касаются внутренним образом в точке A, значит, по определению внутреннего касания окружностей точка A принадлежит отрезку OO_1. Равнобедренные треугольники AOB и AO_1C подобны, так как угол OAB — общий. Стороны OB и O_1C соответственные и являются радиусами окружностей с центрами O и O_1. Значит, коэффициент подобия треугольников AOB и AO_1C равен $\frac{4}{3}$ ($OB = 12$ см, $O_1C = 9$ см). В силу теоремы об отношении соответствующих линейных элементов двух подобных треугольников, $AB = \frac{4}{3}AC$, так как стороны AB и AC — соответственные. Следовательно, $AB = \frac{4}{3}AC = 24$ см.



8. Ответ: 2.

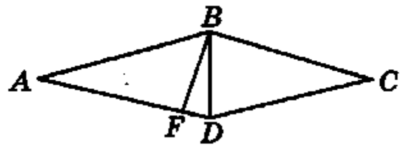
Решение. По условию стороны AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ параллельны, значит, углы OAB и OCD равны как накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD и секущей AC, а углы BOA и DOC равны, как вертикальные, $OA = OC$, следовательно, треугольники AOB и COD равны по стороне и прилежащим к ней углам. Значит, $AB = CD$, следовательно, по признаку параллелограмма четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

По свойству сторон параллелограмма стороны AD и BC параллелограмма $ABCD$ равны, $AD = BC = 7$ см.



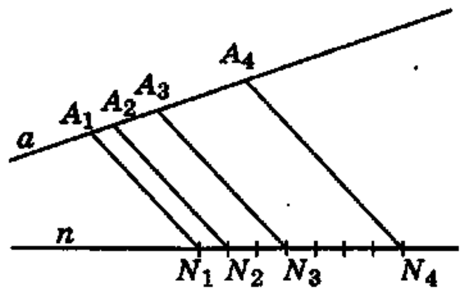
9. Ответ: 2,5.

Решение. По условию $\angle ADB = 75°$, значит, $\angle ADC = 150°$, по свойству диагоналей ромба: диагональ ромба является биссектрисой его углов. Отсюда $\angle BAD = 30°$. В треугольнике ABF отрезок BF высота, значит, треугольник ABF — прямоугольный и $\angle BAD = 30°$, следовательно, по свойству прямоугольного треугольника, один угол которого равен $30°$, $BF = \frac{1}{2}AB = 2{,}5$ см.



10. Ответ: 28.

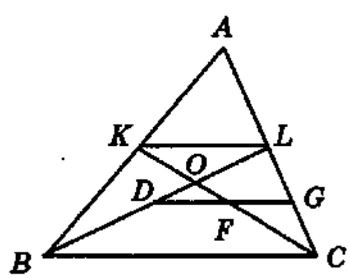
Решение. Из теоремы Фалеса следует, что если параллельные прямые A_1N_1, A_2N_2, A_3N_3 и A_4N_4 пересекают прямые a и n и при этом $N_1N_2 : N_2N_3 : N_3N_4 = 1 : 2 : 4$, то $A_1A_2 : A_2A_3 : A_3A_4 = 1 : 2 : 4$. Отсюда $A_1A_2 : A_3A_4 = 1 : 4$. Следовательно, $A_3A_4 = 28$ см.



11. Ответ: 16.

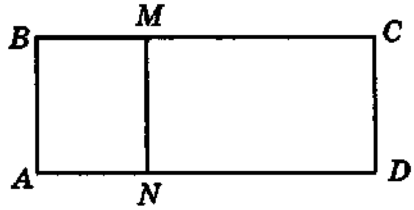
Решение. Обозначим середины медиан BL и CK точками D и F соответственно. Соединим точки K и L, тогда отрезок KL — средняя линия треугольника ABC, поэтому $KL = \frac{1}{2}BC$.

Через точку D проведем прямую, параллельную BC, до пересечения со стороной AC в точке G. По теореме Фалеса точка G — середина CL, т. е. отрезок DG — средняя линия треугольника BLC, поэтому, $DG = \frac{1}{2}BC$. Так как $KL = \frac{1}{2}BC$ и $DG = \frac{1}{2}BC$, то $KL = DG = \frac{1}{2}BC$. Кроме того, так как $DG \parallel KL$, то отрезок DG содержит точку F. Следовательно, отрезок FG — средняя линия треугольника CKL, поэтому, $FG = \frac{1}{2}KL$ или $FG = \frac{1}{2}DG$, значит, $DF = FG = \frac{1}{2}DG = \frac{1}{4}BC$. По условию, $DF = 4$ см, следовательно $BC = 16$ см.



12. Ответ: 6.

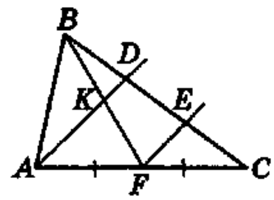
Решение. По условию, дан прямоугольник $ABCD$, в котором проведен отрезок MN, параллельный одной из сторон прямоугольника. Отрезок MN может быть параллелен только меньшей сторона прямоугольника $ABCD$. В противном случае в двух подобных прямоугольниках были бы равные стороны, что возможно только в случае, когда коэффициент подобия равен 1, т. е. прямоугольники равны. В данном случае это не так, поскольку требуется найти большую сторону меньшего из полученных прямоугольников. Значит, равных прямоугольников нет. Для определенности обозначим прямоугольник, подобный прямоугольнику $ABCD$, как $ABMN$. По условию, стороны прямоугольника $ABCD$ равны 6 см и 15 см, т. е. $AB : BC = 2 : 5$, а так как "отношение отрезков в одной фигуре равно отношению соответствующих отрезков в подобной фигуре", то $BM : AB = 2 : 5$. Так как AB равно 6 см, то BM равно 2,4 см. Отсюда, стороны прямоугольника $ABMN$ равны 6 см и 2,4 см, а стороны прямоугольника $NMCD$ равны 6 см и 12,6 см. Следовательно, прямоугольник $ABMN$ — меньший и его большая сторона равна 6 см.



Часть 3

13. Ответ: 1 : 3.

Решение. Через точку F проведем прямую, параллельную AD. Она пересекает сторону BC в точке E. Тогда, по теореме Фалеса, если параллельные прямые AD и FE, пересекающие стороны угла ACB, отсекают на стороне AC равные отрезки AF и FC, то на стороне CB они отсекают равные отрезки CE и ED. Аналогично, для угла FBC, так как $BK = KF$, то $BD = DE$.

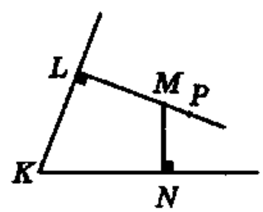


Значит, $CE = ED = DE$. Таким образом, $BD = \frac{1}{3}BC$ или $BD : BC = 1 : 3$.

14. Ответ: 45.

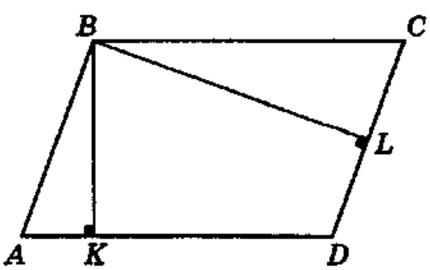
Решение. Сначала докажем, что углы с взаимно перпендикулярными сторонами либо равны, либо дополняют друг друга до 180° (рис. а).

Внутри угла LKN отметим точку M и опустим из нее перпендикуляры ML и MN к сторонам угла соответственно. Точка M отмечена внутри угла LKN, значит, она лежит с лучом KL в одной полуплоскости относительно прямой KN. Поэтому отрезки KL, LM и MN лежат в одной полуплоскости относительно прямой KN. Аналогично доказывается, что отрезки KL, LM и MN лежат в одной полуплоскости относительно прямой KL. Следовательно, четырехугольник $KLMN$ — выпуклый.



а)

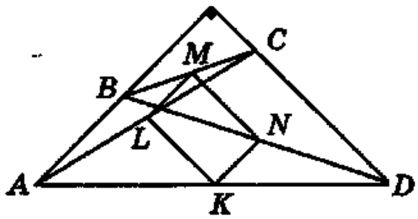
Сумма углов выпуклого четырехугольника равна 360°, углы KLM и KNM равны 90°, так как ML и MN — перпендикулярны сторонам угла. Значит, углы LKN и LMN дополняют друг друга до 180°, а углы LKN и NMP равны.



б)

Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ (рис. б). Углы LBK и ADC со взаимно перпендикулярными сторонами, значит, $\angle ADC$ дополняет $\angle LBK$ до 180°. По свойству углов параллелограмма $\angle ABC = \angle ADC$. Значит, $\angle ABC = 3\angle LBK$, $\angle ABC + \angle LBK = 3\angle LBK + \angle LBK = 180°$, $\angle LBK = 45°$. Отсюда $\angle ABC = 135°$, а $\angle BAC = 45°$ как прилегающие к одной стороне параллелограмма.

15. Решение. Дано: $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, в котором $AB \perp CD$; точки M и K — середины сторон AD и BC; точки L и N — середины диагоналей AC и BD.



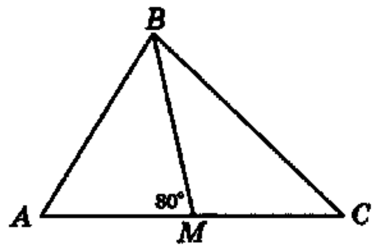
Рассмотрим четырехугольник $KLMN$. Так как отрезок MN — средняя линия треугольника BCD, то $MN \parallel CD$ и $MN = \frac{1}{2}CD$. Аналогично, отрезок KL — средняя линия треугольника ACD, поэтому $KL \parallel CD$ и $KL = \frac{1}{2}CD$. Следовательно, $MN \parallel KL$ и $MN = KL$, значит, четырехугольник $KLMN$ — параллелограмм в силу признака параллелограмма. В треугольнике ABC отрезок ML — средняя линия, поэтому $LM \parallel AB$. Так как $KL \parallel CD$, а $LM \parallel AB$ и $AB \perp CD$, то $KL \perp LM$. Следовательно, параллелограмм $MNPQ$ является прямоугольником. Поэтому по свойству диагоналей прямоугольника $MK = LN$, что и требовалось доказать.

ТЕСТ 3

Вариант 1

Часть 1

1. Ответ: 2.



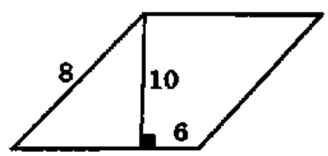
Решение. Так как BM — медиана треугольника ABC, то $AM = MC$. Значит, в треугольниках ABM и BMC: BM — общая сторона, $AM = MC$. Углы BMA и BMC — смежные и $\angle BMA = 80°$, значит, $\angle BMC = 100°$. Отсюда сторона BC в треугольнике BMC по теореме косинусов равна $BC = \sqrt{BM^2 + MC^2 - 2BM \cdot MC \cdot \cos 100°}$, а сторона AB в треугольнике ABM равна $AB = \sqrt{BM^2 + AM^2 - 2BM \cdot AM \cdot \cos 80°}$. Подкоренное выражение для BC больше, поскольку сторона BC лежит против тупого угла, косинус которого отрицателен. Следовательно, $BC > AB$.

2. Ответ: 4.

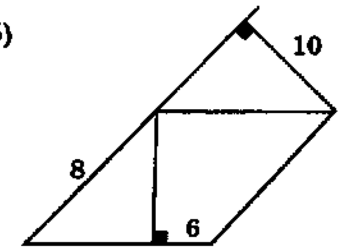
Анализируем условие задачи,

В прямоугольном треугольнике наибольшим является прямой угол, значит, гипотенуза больше катета. Если провести высоту к стороне, равной 6 см, то получим прямоугольный треугольник, у которого катет равен 10 см, а гипотенуза 8 см (рис. а). Такой треугольник не существуют. Если провести высоту к стороне, равной 8 см, то получим прямоугольный треугольник, у которого катет равен 10 см, а гипотенуза 6 см. Такой треугольник не существуют. Следовательно, задача не имеет решения.

а)



б)



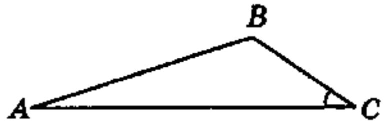
3. О т в е т: 3.

Решение. Так как по условию 16 < 8 + 15, то стороны треугольника удовлетворяют неравенству треугольника. Значит, такой треугольник существует. В силу следствия из теоремы косинусов «треугольник будет остроугольный, прямоугольный или тупоугольный в зависимости от того, больше нуля, равно нулю или меньше нуля выражение $b^2 + c^2 - a^2$, где a — наибольшая сторона треугольника». По условию $15^2 + 8^2 - 16^2 > 0$, значит, треугольник — остроугольный.

4. О т в е т: 1.

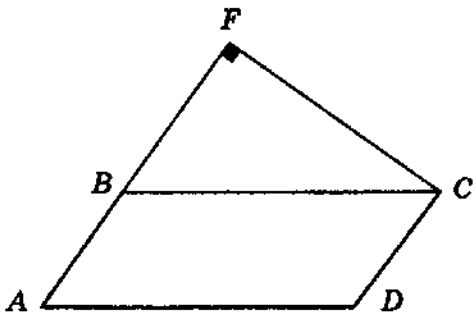
Анализируем условие задачи.

По теореме синусов можно найти синус угла BAC. Так как $BC < AB$, то $\angle BAC$ — острый. Значит, угол ABC определяются однозначно. Таким образом, получили данную сторону (пусть, например, BC) и два прилежащих к ней угла, ($\angle C$ — данный в условии задачи и $\angle B$ — можно однозначно вычислить). Заданные сторона и прилежащие к ней углы однозначно задают треугольник (второй признак равенства треугольников). Следовательно, решение — одно.



5. О т в е т: 1.

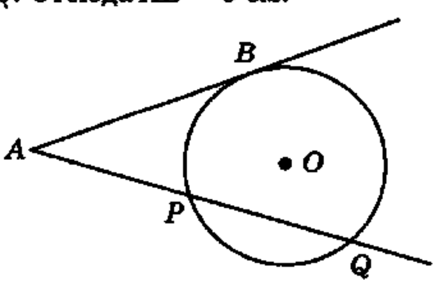
Решение. Так как у четырехугольника $ABCD$ стороны BC и AD параллельны, то четырехугольник $ABCD$ по определению трапеция. Треугольник CFD — прямоугольный, так как по условию $CF \perp AB$. Значит, по теореме Пифагора $BC^2 = CF^2 + FB^2 = 15^2 + 8^2 = 289$, $BC = 17$ см. Таким образом, $BC = 17$ см, а по условию $AD = 17$ см. Следовательно, у четырехугольника $ABCD$ стороны BC и AD равны и параллельны, значит, четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.



Часть 2

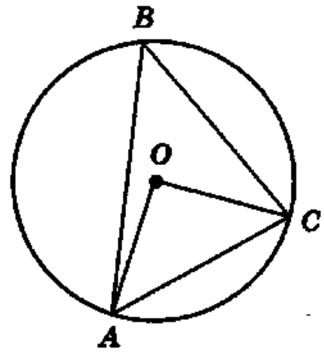
6. О т в е т: 6.

Решение. Воспользуемся промежуточным результатом теоремы о свойстве хорд в окружности, именно, пропорциональностью отрезков секущих и секущих $AB \cdot AB = AQ \cdot AP$, $AB^2 = AQ \cdot AP$, $AB^2 = 9 \cdot 4 = 36$. Отсюда $AB = 6$ см.



7. **Ответ**: $\sqrt{2}$.

Решение. Соединим центр окружности — точку O с концами хорды AC, получим равнобедренный треугольник AOC, поскольку $AO = OC$, как радиусы одной окружности. Таким образом, на дугу AC опираются вписанный угол ABC и центральный угол AOC. По условию $\angle ABC = 45°$, значит, по теореме о вписанных углах $\angle AOC = 90°$. Следовательно, треугольник AOC равнобедренный и прямоугольный. По теореме Пифагора $AO^2 + OC^2 = AC^2$; $2AO^2 = AC^2$; $2AO^2 = 4$. Отсюда $AO = \sqrt{2}$ см.



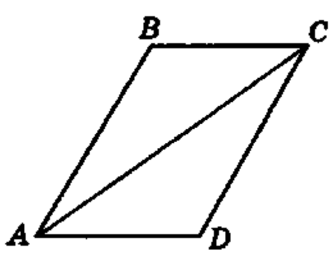
8. **Ответ**: $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

Решение. $\sin 45° \cdot \operatorname{tg} 60° - \cos 45° \cdot \cos 30° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

9. **Ответ**: 30.

Решение. По условию в параллелограмме $ABCD$ $AD = BC = 1$, $AB = CD = \sqrt{3}$ и $AC = \sqrt{7}$. Диагональ AC и две стороны параллелограмма AB и BC удовлетворяют неравенству треугольника, значит, треугольник ABC существует. По теореме косинусов $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B$; $7 = 3 + 1 - 2\sqrt{3}\cos B$; $\cos B = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

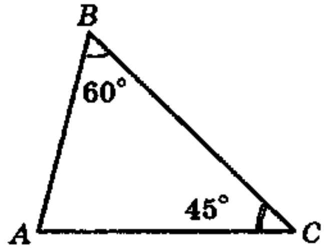
Так как косинус угла B отрицательный, то угол B — тупой и равен $150°$. Значит, меньший угол параллелограмма равен $30°$.



10. **Ответ**: $\frac{8\sqrt{6}}{3}$.

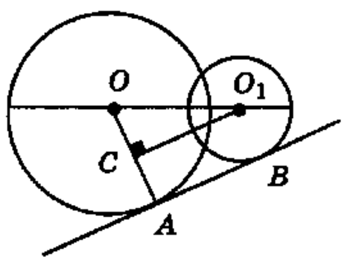
Решение. Для определенности пусть стороной, противолежащей углу в $45°$, будет сторона AB, тогда в треугольнике ABC $\angle ABC = 60°$, $\angle BCA = 45°$ и сторона AC равна 8 см.

По теореме синусов $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}$; отсюда $\frac{AB}{AC} = \frac{\sin 45°}{\sin 60°} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $AB = AC\sqrt{\frac{2}{3}} = 8\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{8\sqrt{6}}{3}$ (см).



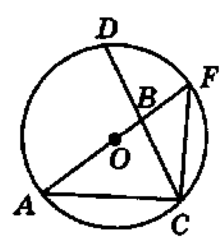
11. Ответ: 17.

Решение. Через точку O_1 проводим прямую, параллельную прямой AB. Отрезок AO перпендикулярен прямой AB (радиус, проведенный в точку касания), значит, отрезок AO перпендикулярен и прямой, параллельной прямой AB, точку их пересечения обозначим C. К прямоугольному треугольнику OCO_1 применим теорему Пифагора. Гипотенуза — искомое расстояние OO_1, один катет равен 15 см, второй катет равен разности радиусов окружностей $12 - 4 = 8$ (см). Отсюда $OO_1 = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17$ (см).



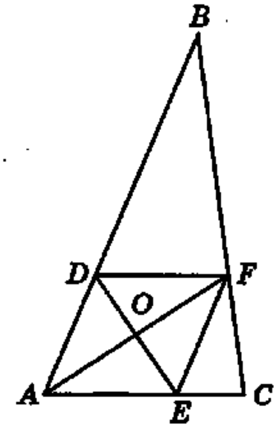
12. Ответ: 5,5.

Решение. Так как центр окружности (точка O), лежит на стороне AB треугольника ABC, то отрезок AF является диаметром окружности. Воспользуемся промежуточным результатом теоремы о свойстве хорд в окружности, именно, пропорциональностью отрезков хорд $AB \cdot BF = CB \cdot BD$, $9 \cdot BF = 6 \cdot 3$. Отсюда $BF = 2$ см. Значит, диаметр AF равен 11 см, следовательно, радиус окружности равен 5,5 см.

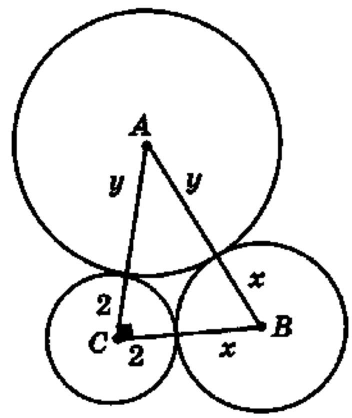


Часть 3

13. Решение. Найдем сторону ромба $ADFE$. Так как диагонали ромба перпендикулярны и точкой пересечения O делятся пополам, то треугольник AOD – прямоугольный и его стороны равны AO и OD соответственно равны 3 см и 4 см. Отсюда гипотенуза AD равна 5 см по теореме Пифагора. У ромба $ADFE$ противоположные стороны DF и AE параллельны. Значит, треугольники ABC и DBF подобны по первому признаку подобия треугольников. Сторона AB треугольника ABC равна 15 см, а отрезок AD равен 5 см, следовательно, отрезок BD равен 10 см. Из подобия треугольников следует: $\frac{BD}{AD} = \frac{BF}{FC}$; $\frac{BF}{FC} = \frac{10}{5} = 2$, то $BF : FC = 2 : 1$.



14. Решение. Обозначим радиус окружности с центром в точке A буквой y, а радиус окружности с центром в точке B буквой x. По условию окружности попарно касаются внешним образом и их центры являются вершинами прямоугольного треугольника ABC, значит, гипотенуза $AB = y + x = 13$, катет $AC = y + 2$ и катет $BC = x + 2$. По теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2$. $(y+2)^2 + (x+2)^2 = 13^2$; $y^2 + x^2 + 4(y+x) + 8 = 169$. Подставим $y + x = 13$ и получим $y^2 + x^2 + 4 \cdot 13 + 8 = 169$, $y^2 + x^2 = 109$.

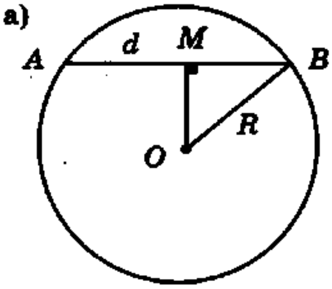


Возведем в квадрат $y + x = 13$: $y^2 + x^2 + 2yx = 169$, подставим сумму квадратов $109 + 2yx = 169$. Получили систему:

$\begin{cases} y + x = 13, \\ yx = 30, \end{cases}$ отсюда ответ 3 и 10.

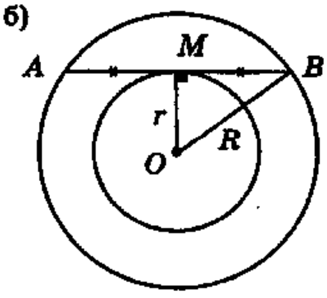
15. Решение. В окружности с центром в точке O и радиусом R хорда AB имеет заданную длину d ($d < 2R$, рис. а). Точка M — середина хорды AB, значит, по свойству хорд окружности $OM \perp AB$. Следовательно, треугольник BOM — прямоугольный. По теореме Пифагора $OM = \sqrt{OB^2 - MB^2} = \sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}}$.

а)



Значит, середины всех хорд заданной длины равноудалены от точки O, т. е. лежат на некоторой окружности радиуса $r = OM = \sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}}$.

б)



Обратно. Пусть точка M лежит на окружности с центром O и радиусом r. Проведем через точку M касательную AB, которая в окружности радиуса R является хордой (рис. б). Так как OM — радиус окружности радиуса r, проведенный в точку касания, то $OM \perp AB$. А так как OM — перпендикуляр, опущенный из центра окружности на хорду, то точка M — середина хорды AB. Следовательно, треугольник BOM — прямоугольный и катет BM равен $\frac{d}{2}$. По теореме Пифагора $MB = \sqrt{OB^2 - OM^2} = \sqrt{R^2 - r^2} = \frac{d}{2}$, отсюда, $AB = d$, что и требовалось доказать.

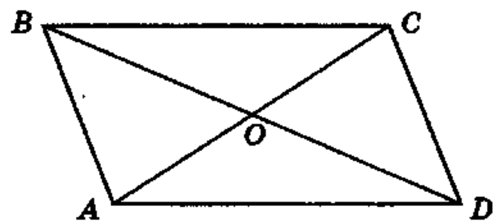
Ответ: окружность с тем же центром и радиусом $r = \sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}}$, где R — радиус данной окружности, d — заданная длина хорды.

Вариант 2

Часть 1

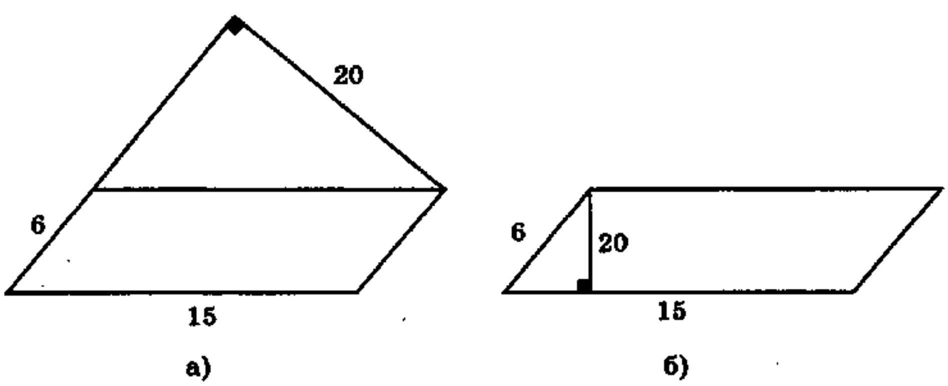
1. Ответ: 1.

Решение. В параллелограмме $ABCD$ углы AOB и COD — вертикальные, значит равные. Диагонали параллелограмма пересекаются в точке O, значит, по теореме о диагоналях параллелограмма $BO = OD$. Значит, в треугольниках BOC и COD: $BO = OD$, OC — общая. Углы BOC и COD — смежные и дополняют друг друга до 180°, причем по условию $\angle COD$ — острый. Обозначим $\angle COD = \alpha$, тогда $\angle BOC = 180° - \alpha$. Отсюда сторона CD в треугольнике COD по теореме косинусов равна $CD = \sqrt{BO^2 + OC^2 - 2BO \cdot OC\cos\alpha}$, а сторона BC в треугольнике BOC равна $BC = \sqrt{BO^2 + OC^2 - 2BO \cdot OC\cos(180 - \alpha)}$. Подкоренное выражение для BC больше, поскольку сторона BC лежит против тупого угла, косинус которого отрицателен. Следовательно, $BC > CD$.



2. Ответ: 4.

Решение. В прямоугольном треугольнике наибольшим является прямой угол, значит, гипотенуза больше катета. Если провести высоту к стороне, равной 6 см, то получим прямоугольный треугольник, у которого катет равен 20 см, а гипотенуза 15 см. Такой треугольник не существует. Если провести высоту к стороне, равной 15 см, то получим прямоугольный треугольник, у которого катет равен 20 см, а гипотенуза 6 см. Такой треугольник не существует. Следовательно, задача не имеет решений.

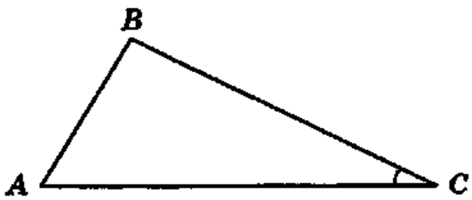


3. О т в е т: 3.

Решение. Так как по условию $3 < 2 + \sqrt{3}$, то стороны треугольника удовлетворяют неравенству треугольника. Значит, такой треугольник существует. В силу следствия из теоремы косинусов «треугольник будет остроугольный, прямоугольный или тупоугольный в зависимости от того, больше нуля, равно нулю или меньше нуля выражение $b^2 + c^2 - a^2$, где a — наибольшая сторона треугольника». По условию $2^2 + (\sqrt{3})^2 - 3^2 < 0$, значит, треугольник — тупоугольный.

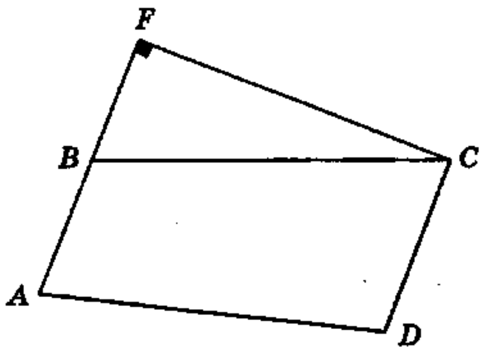
4. О т в е т: 4.

Анализируем условие задачи. Для определения угла A необходимо найти $\sin A$. Применим теорему синусов: $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A}$, $\frac{6}{\sin 35°} = \frac{12}{\sin A}$, значит, $\sin A = 2 \cdot \sin 35°$. При возрастании угла от 0° до 90° синус возрастает от 0 до 1, следовательно, $\sin 35° > \sin 30°$. А так как $\sin 30° = \frac{1}{2}$, значит $\sin A > 1$, что невозможно. Следовательно, такой треугольник не существует и задача не имеет решения.



5. О т в е т: 3.

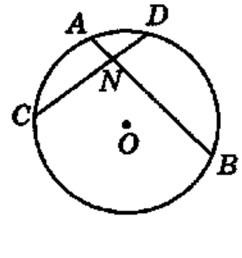
Решение. Так как у четырехугольника $ABCD$ стороны AB и CD параллельны, то это может быть либо параллелограмм, либо трапеция. Треугольник CFB — прямоугольный, так как по условию $CF \perp AB$. Значит, по теореме Пифагора $BC^2 = CF^2 + BF^2 = 12^2 + 5^2 = 169$, $BC = 13$ (см). По условию, сторона AD равна 15 см, следовательно, у четырехугольника $ABCD$ стороны BC и AD не равны. Значит, четырехугольник $ABCD$ — трапеция.



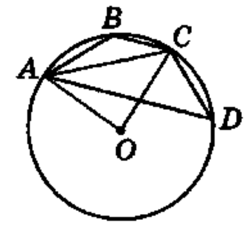
Часть 2

6. О т в е т: 3.

Решение. Воспользуемся промежуточным результатом теоремы о свойстве хорд в окружности, именно, пропорциональностью отрезков хорд $AN \cdot BN = DN \cdot CN$. Отсюда $AN = \frac{CN \cdot ND}{BN}$, $AN = \frac{15 \cdot 6}{30} = 3$ (см).



7. Ответ: $\frac{5}{2}\sqrt{2}$.



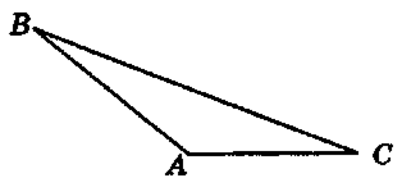
Решение. В равнобочной трапеции углы при основании равны, значит, $\angle ADC = \angle BAD$. По условию $\angle ABC = 135°$, значит, $\angle BAD = 45°$, как углы прилежащие к одной стороне трапеции. Диагональ AC равнобокой трапеции $ABCD$ лежит против угла ADC, стягивает дугу AC. Соединим центр окружности — точку O с концами хорды AC, получим равнобедренный треугольник AOC, поскольку $AO = OC$ как радиусы одной окружности. Таким образом, на дугу AC опираются вписанный угол ADC и центральный угол AOC. Так как $\angle ADC = 45°$, то по теореме о вписанных углах $\angle AOC = 90°$. Следовательно, треугольник AOC — равнобедренный и прямоугольный. По теореме Пифагора $AO^2 + OC^2 = AC^2$; $2AO^2 = AC^2$; $2AO^2 = 25$. Отсюда $AO = \frac{5}{2}\sqrt{2}$ см.

8. Ответ: 1.

Решение. $\sin 60° \cdot \cos 30° - \cos 60° \cdot \mathrm{tg}\, 45° = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

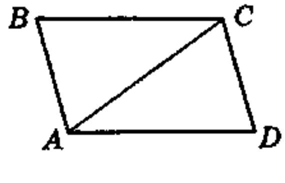
9. Ответ: 150.

Решение. Пусть в треугольнике ABC $AB = 1$ $AC = \sqrt{3}$, $BC = \sqrt{7}$. Так как $1 + \sqrt{3} > \sqrt{7}$, то стороны треугольника удовлетворяют неравенству треугольника, значит, треугольник ABC существует. По теореме косинусов $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$; $7 = 3 + 1 - 2\sqrt{3}\cos A$; $\cos A = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Так как косинус угла A отрицательный, то угол A — тупой и равен $150°$.



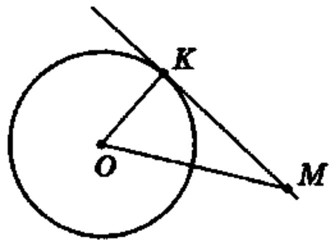
10. Ответ: $4\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. По условию $\angle BAC = 60°$ и $\angle CAD = 45°$. Так как в параллелограмме $ABCD$ стороны BC и AD параллельны. Значит, $\angle BCA = \angle CAD$ как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AC. Таким образом, в треугольнике BAC $\angle BAC = 60°$, $\angle BCA = 45°$ и сторона AB равна 4 см, как лежащая против меньшего угла. По теореме синусов $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}$; отсюда $BC = \frac{AB \cdot \sin A}{\sin C} = \frac{4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 4\frac{\sqrt{3}}{2}$ (см).



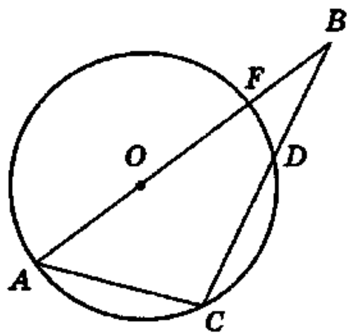
11. Ответ: 29.

Решение. Соединим точку O с точками M и K и рассмотрим треугольник OKM. Отрезок OK перпендикулярен прямой KM, как радиус, проведенный в точку касания. Значит, треугольник OKM — прямоугольный и его катеты равны $OK = 20$ см и $KM = 21$ см. По теореме Пифагора $OM^2 = OK^2 + KM^2 = 20^2 + 21^2$, $OM = 29$ см.



12. Ответ: 5,5.

Решение. Так как центр окружности (точка O), лежит на стороне AB треугольника ABC, то отрезок AF является диаметром окружности. Воспользуемся промежуточным результатом теоремы о свойстве секущих к окружности, а именно, пропорциональностью отрезков секущих $AB \cdot BF = CB \cdot BD$, $15 \cdot BF = 12 \cdot 5$. Отсюда $BF = 4$ см. Значит, диаметр AF равен 11 см, следовательно, радиус окружности равен 5,5 см.

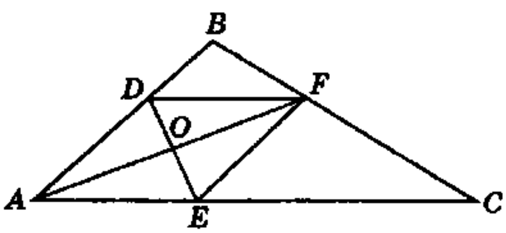


Часть 3

13. Ответ: 1 : 2.

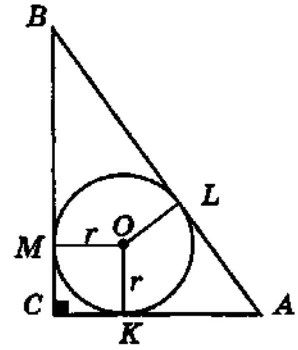
Решение. Найдем сторону ромба $ADFE$. Так как диагонали ромба перпендикулярны и точкой пересечения O делятся пополам, то треугольник AOD — прямоугольный и его стороны равны AO и OD соответственно равны 6 см и 8 см. Отсюда гипотенуза AD равна 10 см по теореме Пифагора. У ромба $ADFE$ противоположные стороны DF и AE параллельны. Значит треугольники ABC и DBF подобны по первому признаку подобия треугольников. Сторона AB треугольника ABC равна 15 см, а отрезок AD равен 10 см, следовательно, отрезок BD равен 5 см. Из подобия треугольников следует:

$\frac{BD}{AD} = \frac{BF}{FC}$; $\frac{BD}{AD} = \frac{10}{5}$, то $BF : FC = 1 : 2$.



14. О т в е т: 3.

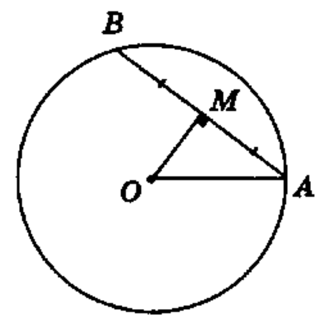
<u>Решение</u>. По свойству касательных, проведенных из одной точки к окружности, $AK = AL$, $BL = BM$, $CM = CK$, отсюда $AB = BL + AL = 17$ см, $AC = AK + CK = 5$ см, $BC = BM + MC = 12$ см. Так как по условию $\angle MCK = 90°$, $\angle CMO = \angle CKO = 90°$ по свойству радиусов, проведенных в точку касания прямой и окружности, и при этом $MO = OK$, то четырехугольник $CMKO$ — квадрат. Значит, $MO = OK = CM = CK = r$. Отсюда в прямоугольном треугольнике ACB: гипотенуза $AB = 17$ см, катеты $AC = 5 + r$, $BC = 12 + r$. По теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2$; $(r + 5)^2 + (r + 12)^2 = 17^2$; $r^2 + 17r - 60 = 0$; отсюда $r = 3$ см.



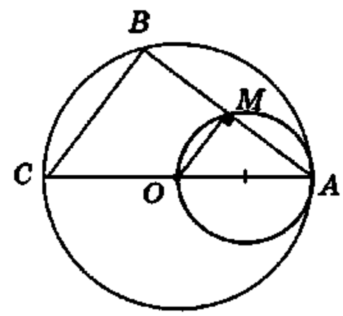
15. <u>Решение</u>. Точка M — середина хорды AB окружности с центром в точке O (рис. а), по свойству хорд окружности $OM \perp AB$. Следовательно, треугольник OMA — прямоугольный. По следствию из теоремы о вписанных углах точка M лежит на окружности с диаметром OA.

<u>Обратно</u>. Пусть точка M лежит на окружности с диаметром OA и не совпадает с точкой A, тогда $\angle AMO = 90°$ (рис. б). Продолжим AM до пересечения с данной окружностью в точке B и проведем через точку A диаметр AC данной окружности. Получим, что $\angle ABC = 90°$, т. е. $OM \parallel BC$, как два перпендикуляра к одной прямой. Так как точка O — центр окружности, то точка O — середина AC, отсюда, по теореме Фалеса точка M — середина AB, что и требовалось доказать.

а)



б)



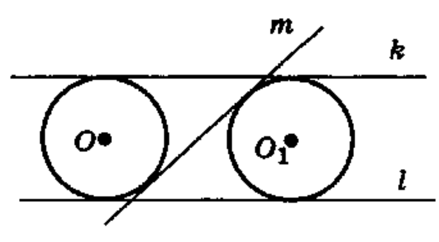
ТЕСТ 4

Вариант 1

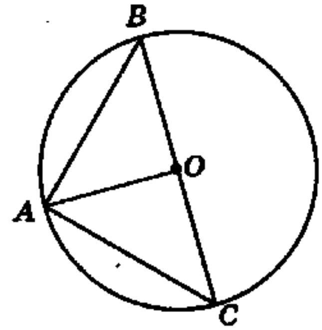
Часть 1

1. О т в е т: 3.

<u>Решение</u>. Две параллельные прямые k и l делят плоскость на три части. А прямая m делит каждую из них на две части, таким образом, получаем шесть частей. Две из них ограничены тремя данными прямыми, четыре другие части ограничены двумя лучами. Значит, только в две части плоскости можно вписать окружность так, чтобы она одновременно касалась каждой из трех прямых k, l и m.

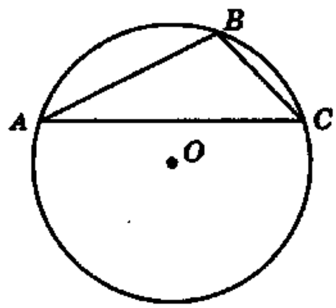


2. О т в е т: 1.



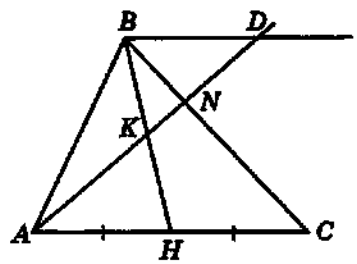
Решение. Точка O пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника ABC является центром окружности, описанной около этого треугольника. Отсюда, во-первых, сторона BC треугольника ABC является диаметром описанной окружности, во-вторых, $OA = OB = OC$ как радиусы одной окружности. Треугольники AOC и AOB — равнобедренные. Отсюда $\angle OBA = \angle OAB$ и $\angle OCA = \angle OAC$. В треугольнике ABC: $\angle BAC = \angle OAB + \angle OAC = \angle ABO + \angle ACO$. По теореме о сумме углов треугольника $\angle BAC + \angle ABO + \angle ACO = 180°$, $2\angle BAC = 180°$, $\angle BAC = 90°$. Следовательно, треугольник ABC — прямоугольный.

3. О т в е т: 3.



Решение. По условию углы треугольника ABC равны $45°$, $108°$ и $27°$. Значит, треугольник ABC — тупоугольный. Угол ABC — тупой, следовательно, дуга ADC больше полуокружности, отсюда точки B и O лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AC. Следовательно, центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит вне треугольника.

4. О т в е т: 2.

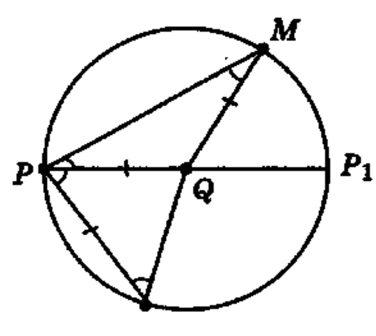


Решение. Углы DAC и ADB равны как накрест лежащие при параллельных прямых AC и BD и секущей AD. Углы ANC и DNB равны, как вертикальные. Следовательно, треугольники ANC и DNB подобны по двум углам. Так как $BN : NC = 1 : 2$, то $BD = \frac{1}{2}AC$, т. е. $AH = BD$.

Углы AHB и DBH равны как накрест лежащие при параллельных прямых AC и BD и секущей BH. Треугольники KAH и KDB равны по стороне и прилежащим углам ($AH = BD$, $\angle AHB = \angle DBH$, $\angle DAC = \angle ADB$). Следовательно, $KH = KB$, значит, точка K делит медиану BH пополам.

5. О т в е т: 4.

Решение. По условию, углы PMQ и QPM равны, значит, точки P, Q и M образуют равнобедренный треугольник PQM с вершиной в точке Q. По определению равнобедренного треугольника $PQ = QM$. Следовательно, точки M равноудалены от точки Q на расстояние, равное PQ, т. е. лежат на окружности радиуса PQ с центром в точке Q. При этом точка M не лежит на прямой PQ, т. е. не совпадает с точкой P и симметричной ей относительно точки Q точкой P_1.



Следовательно, геометрическим местом точек M является окружность радиуса PQ с центром в точке Q с «выколотыми» точкой P и симметричной ей точкой P_1.

Обратно. Пусть точка M_1 принадлежит окружности радиуса PQ с центром в точке Q, и не совпадает с точками P и P_1. Треугольник PQM_1 — равнобедренный, так как $PQ = QM_1$ как радиусы одной окружности. Следовательно, по свойству углов равнобедренного треугольника $\angle PM_1Q = \angle QPM_1$.

Часть 2

6. Ответ: 10.

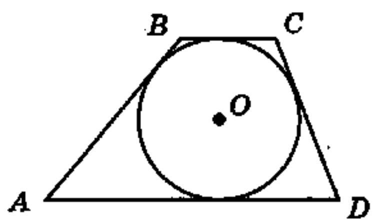
Решение. Для того, чтобы четырехугольник можно было описать около окружности, необходимо и достаточно, чтобы суммы его противоположных сторон были равны. Отсюда, сумма двух противоположных сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$ равна полупериметру $AB + CD = 17$ см. По условию $AB = CD + 3$, значит, $2CD + 3 = 17$ и $CD = 7$ см. Следовательно, сторона $AB = 10$ см.

7. Ответ: прямоугольник.

Решение. Для того чтобы около четырехугольника можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы его противоположных сторон были равны. Этому условию удовлетворяют два параллелограмма: прямоугольник и квадрат. Но, по условию, у данного параллелограмма диагонали не перпендикулярны. Следовательно, это прямоугольник.

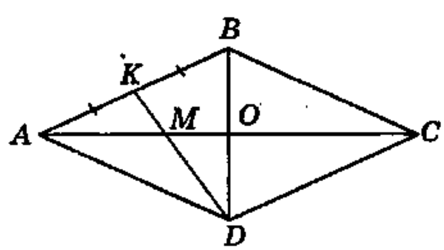
8. Ответ: 40.

Решение. Так как трапеция $ABCD$ описана около окружности, то по свойству описанного четырехугольника сумма боковых сторон трапеции равна сумме ее оснований, т. е. $AD + BC = AB + CD$. По условию $AD + BC = 20$ см, значит, периметр трапеции равен 40 см.



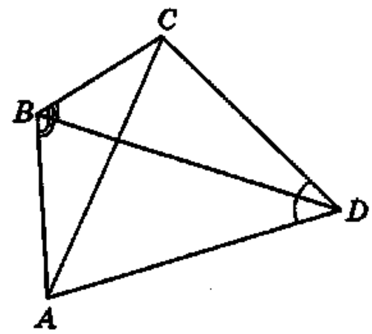
9. Ответ: 16.

Решение. В треугольнике ABD отрезок DK — медиана, так как по условию $AK = KB$ и AO — медиана, так как точка O является точкой пересечения диагоналей ромба. Следовательно, точка M является точкой пересечения медиан DK и AO и делит отрезок AO в отношении 2 : 1, считая отрезок от вершины A. Отсюда отрезок $MO = \frac{1}{3}AO = \frac{1}{6}AC = 4$ см. $MC = MO + OC = 4 + 12 = 16$ (см).



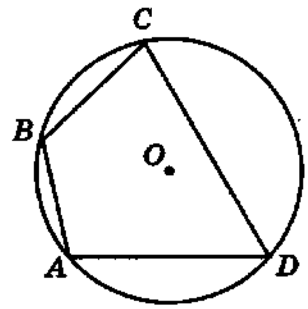
10. Ответ: 50.

<u>Решение</u>. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle ABC = \angle CBD + \angle ABD = 50° + 70° = 120°$, $\angle ADC = 60°$, отсюда сумма углов ABC и ADC равна $180°$. Следовательно, четырехугольник $ABCD$ — вписанный. Угол CAD опирается на дугу CD и угол CBD опирается на эту же дугу CD и равен $50°$. Значит, $\angle CAD = 50°$.



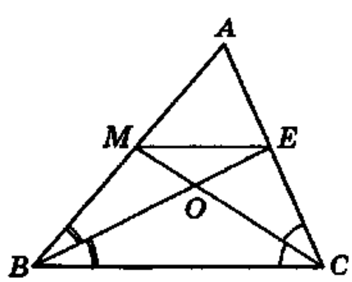
11. Ответ: 108.

<u>Решение</u>. Так как четырехугольник $ABCD$ вписанный, то сумма противоположных углов равна $180°$, т. е. $\angle BAD + \angle BCD = 180°$. Так как внешний угол при вершине C равен $108°$, то смежный с ним угол BCD равен $72°$. Значит, $\angle BAD = 180° - \angle BCD = 180° - 72° = 108°$.



12. Ответ: 30.

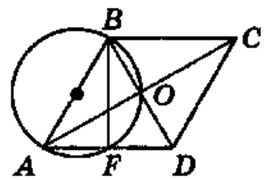
<u>Решение.</u> По условию в треугольнике ABC угол BAC равен $60°$, значит, $\angle ABC + \angle ACB = 120°$. Так как BE и CM биссектрисы углов ABC и ACB, то $\angle ABE + \angle ACM = 60°$, значит, в треугольнике BOC $\angle BOC = 120°$. В четырехугольнике $MAEO$ $\angle MAE = 60°$, $\angle MOE = 120°$, значит, около него можно описать окружность. В этой окружности вписанный угол MAE, равный $60°$, опирается на дугу ME, равную $120°$. Отрезок AO — является биссектрисой угла MAE, так как проходит через точку пересечения биссектрис (точка O). Следовательно, точка O является серединой дуги ME и делит ее на две равные дуги. Следовательно, дуга MO равна $60°$. Отсюда угол BEM равен $30°$.



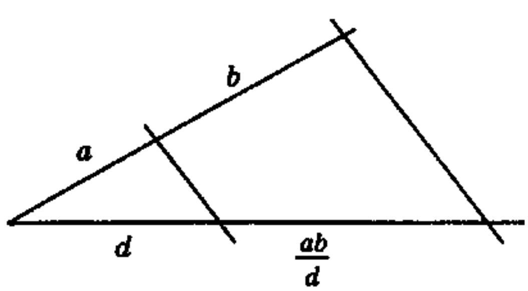
Часть 3

13. Решение. Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма, F — середина AD. Так как угол AOB — вписанный и опирается на диаметр, то $\angle AOB = 90°$, т. е. диагонали параллелограмма перпендикулярны. Следовательно, $ABCD$ — ромб и $AB = AD$. Угол AFB — также вписанный и опирается на диаметр, поэтому $\angle AFB = 90°$.

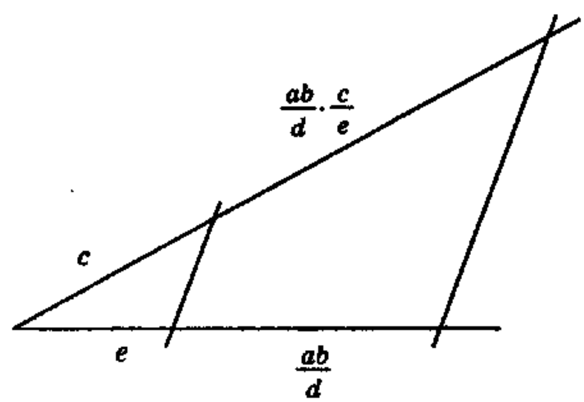
Следовательно, BF — медиана и высота треугольника ABD, значит, треугольник ABD — равнобедренный и $AB = BD$. Таким образом, $AB = AD$ и $AB = BD$, значит, треугольник ABD — равносторонний, т. е. $\angle DAB = 60°$.



14. Решение. Преобразуем выражение: $\frac{abc}{de} = \frac{ab}{d} \cdot \frac{c}{e} = \frac{\frac{ab}{d} \cdot c}{e}$. Из преобразованной формулы видно, что сначала надо построить отрезок $\frac{ab}{d}$. Для его построения воспользуемся методом построения четвертого пропорционального отрезка $\frac{d}{b} = \frac{a}{x}$ и построим отрезок $x = \frac{ab}{d}$ (рис. а). Затем по трем отрезкам $\frac{ab}{d}$, c и e построим четвертый пропорциональный отрезок $y = \frac{abc}{de}$, снова воспользовавшись методом построения четвертого пропорционального отрезка $\frac{e}{c} = \frac{\frac{ab}{d}}{y}$ (рис. б).



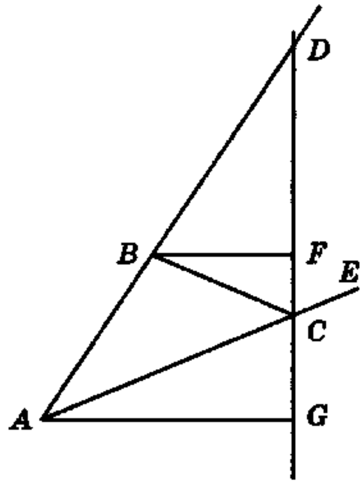
а)



б)

15. Решение. К прямой DC из точек A и B опустим перпендикуляры AG и BF. Так как прямая CD — биссектриса внешнего угла треугольника, $\angle BCF = \angle ECF$. Углы ACG и ECF равны как вертикальные. Значит, $\angle BCF = \angle ACG$. Треугольники BCF и ACG подобны как прямоугольные треугольники с равными углами BCF и ACG. Значит, $\frac{AC}{CB} = \frac{AG}{BF}$.

Треугольники BDF и ADG подобны, как прямоугольные треугольники с общим углом при вершине D. Значит, $\frac{AD}{DB} = \frac{AG}{BF}$. Отсюда $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CB}$.

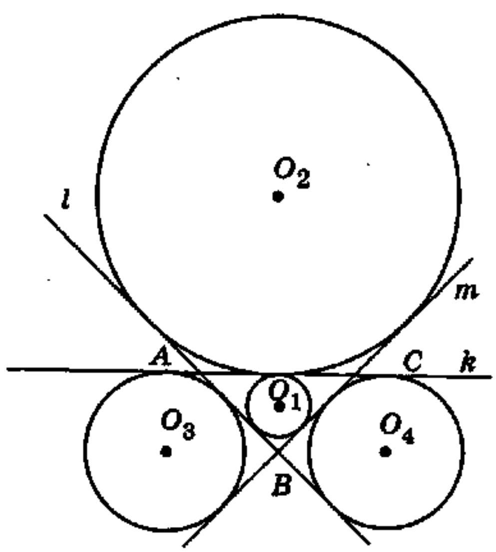


Вариант 2

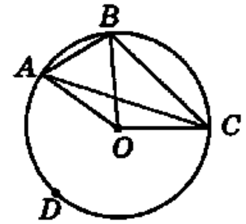
Часть 1

1. Ответ: 4.

Решение. Три попарно пересекающиеся прямые k, l и m образуют треугольник ABC и делят плоскость на семь частей. Четыре из них ограничены тремя данными прямыми: треугольник ABC и три части, определяемые одной из сторон треугольника и двумя другими прямыми. Три другие части ограничены двумя лучами, являющимися продолжением сторон каждого из углов треугольника. Как известно, у каждого треугольника имеются четыре окружности: одна вписанная и три вневписанные. Эти четыре окружности будут одновременно касаться каждой из трех прямых k, l и m.

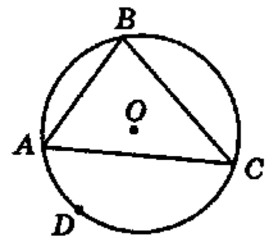


2. О т в е т: 3.



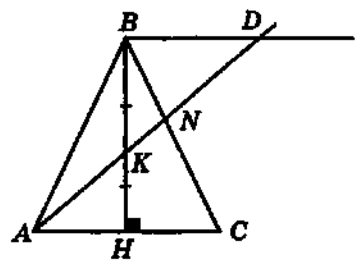
Решение. Точка O пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника ABC является центром окружности, описанной около этого треугольника. Отсюда $OA = OB = OC$ как радиусы одной окружности. Значит, треугольники AOC, AOB и BOC — равнобедренные и боковые стороны у них равны. В треугольнике AOC: $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$. Отсюда следует, что в треугольнике ABC сторона AC — большая, а против большей стороны лежит больший угол. Значит, в треугольнике ABC $\angle ABC$ — больший. Точки B и O лежат по разные стороны относительно хорды AC, так как точка пересечения серединных перпендикуляров лежит вне треугольника. При этом $\angle AOC$ опирается на дугу ABC, которая меньше $180°$. Значит, $\angle ABC$ опирается на дугу ADC, которая больше $180°$. Следовательно, вписанный угол ABC — больше $90°$, а треугольник ABC — тупоугольный.

3. О т в е т: 1.



Решение. По условию углы треугольника ABC равны $45°$, $60°$ и $75°$. Значит треугольник ABC — остроугольный. Угол ABC – острый, следовательно, дуга ADC меньше полуокружности, отсюда точки B и O лежат в одной полуплоскости относительно прямой AC. Аналогично доказывается, что точки A и O лежат в одной полуплоскости относительно прямой BC. Значит, точка O лежит внутри угла ACB. Аналогично доказывается, что точка O лежит внутри углов ABC и BAC. Следовательно, центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит внутри треугольника.

4. О т в е т: 2.

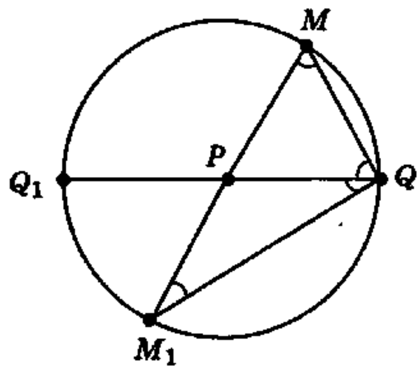


Решение. Углы DAC и FDB равны как накрест лежащие при параллельных прямых AC и BD и секущей AD. Так как прямые AC и BD параллельны, то треугольники KAH и KDB — прямоугольные (BH — высота равнобедренного треугольника ABC) и равны по катету ($KH = KB$, K — середина высоты BH) и острому углу ($\angle HKA = \angle BKD$ как вертикальные). Следовательно, $BD = AH = \frac{1}{2}AC$ по свойству высоты равнобедренного треугольника. Кроме того, треугольники ANC и DNB подобны по двум углам: углы DAC и FDB равны по доказанному, углы ANC и DNB равны как вертикальные. Следовательно, $\frac{BN}{NC} = \frac{BD}{AC} = \frac{1}{2}$, т. е. $BN : NC = 1 : 2$.

5. О т в е т: 3.

Решение. По условию углы PMQ и MQP равны, значит, точки P, Q и M образуют равнобедренный треугольник QPM с вершиной в точке P. По определению равнобедренного треугольника $PQ = PM$. Следовательно, точки M равноудалены от точки P на расстояние, равное PQ, т. е. лежат на окружности радиуса PQ с центром в точке P. При этом точка M не лежит на прямой PQ, т. е. не совпадает с точкой Q и симметричной ей относительно точки P точкой Q_1.

Следовательно, геометрическим местом точек M является окружность радиуса PQ с центром в точке P с «выколотыми» точкой Q и симметричной ей точкой Q_1.



Обратно. Пусть точка M_1 принадлежит окружности радиуса PQ с центром в точке $PQ = PM$ и не совпадает с точками Q и Q_1. Треугольник QPM_1 — равнобедренный, так как $PQ = PM_1$ как радиусы одной окружности. Следовательно, по свойству углов равнобедренного треугольника $\angle PM_1Q = \angle M_1QP$.

Часть 2

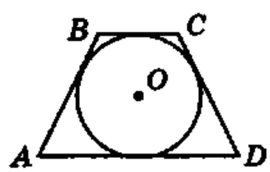
6. Ответ: 12.

Решение. Для того, чтобы четырехугольник можно было описать около окружности, необходимо и достаточно, чтобы суммы его противоположных сторон были равны. Отсюда, сумма двух противоположных сторон четырехугольника $ABCD$ равна полупериметру $AB + CD = 16$ см. По условию $AB = 3CD$, значит, $4CD = 16$ и $CD = 4$ см. Следовательно, сторона $AB = 12$ см.

7. Ответ: квадрат.

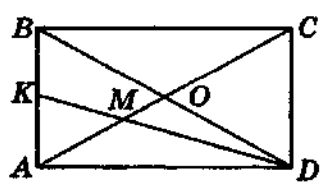
Решение. Для того чтобы около четырехугольника можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма его противоположных углов равнялась 180°. Этому условию удовлетворяют два параллелограмма: прямоугольник и квадрат. Но, по условию, у данного параллелограмма диагонали не перпендикулярны. Следовательно, это квадрат.

8. Ответ: 44.



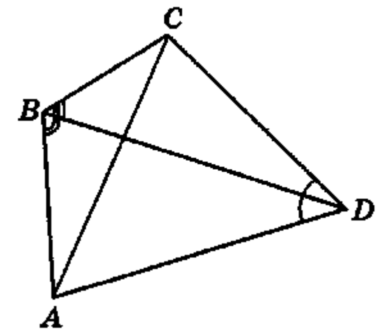
Решение. Так как трапеция $ABCD$ — равнобочная, то ее боковые стороны AB и CD равны, т. е. $AB = CD = 11$ см. По условию трапеция $ABCD$ описана около окружности, значит, по свойству описанного четырехугольника сумма боковых сторон трапеции равна сумме ее оснований, т. е. $AD + BC = AB + CD = 22$ см. Значит, периметр трапеции равен 44 см.

9. Ответ: 8.



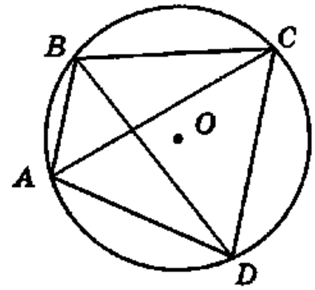
Решение. В треугольнике ABD отрезки DK и AO — медианы, так как в первом случае $AK = KB$; так как точка K — середина стороны AB, а во втором точка O является точкой пересечение медиан прямоугольника $ABCD$. Следовательно, точка M является точкой пересечения медиан DK и AO и делит отрезок AO в отношении 2 : 1, считая от вершины A. В прямоугольнике медианы равны $AC = BD = 24$ см. Отсюда отрезок $AM = \frac{2}{3}AO = \frac{1}{3}AC = 8$ см.

10. Ответ: 45.



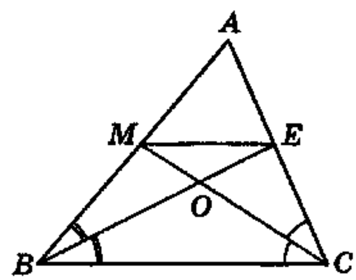
Решение. В четырехугольнике $ABCD$ по условию угол ABC равен $110°$, угол ADC равен $70°$, отсюда сумма углов ABC и ADC равна $180°$. Следовательно, четырехугольник $ABCD$ — вписанный. Угол ACB опирается на дугу AB и угол BDA опирается на эту же дугу CD. При этом $\angle BDA = \angle ADC - \angle BDC = 70° - 25° = 45°$.

11. Ответ: 55.



Решение. Так как четырехугольник $ABCD$ вписанный, то сумма противоположных углов равна $180°$, т. е. $\angle ABC + \angle ADC = 180°$. В свою очередь $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$, отсюда $\angle ABD + \angle DBC + \angle ADC = 180°$. Значит, $\angle DBC = 180° - \angle ABD - \angle ADC = 180° - 50° - 75° = 55°$. Углы DBC и CAD опирается на одну дугу DC, следовательно, они равны, поэтому $\angle CAD = 55°$.

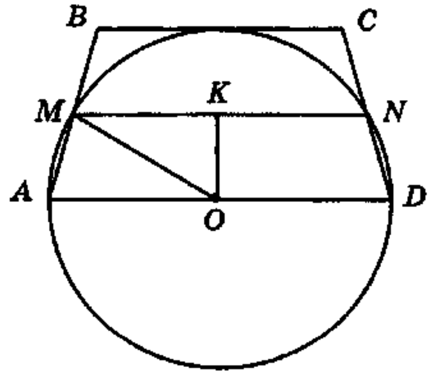
12. Ответ: 60.



Решение. По условию точки A, M, O и E лежат на одной окружности, т. е. четырехугольник $MAEO$ — вписанный, значит, $\angle BAC + \angle MOE = 180°$, $\angle MOE = 180° - \angle BAC$, в треугольнике BOC: $\angle OBC + \angle OCB = 180° - \angle BOC$. Углы BOC и MOE равны как вертикальные. Значит, $\angle OBC + \angle OCB = \angle BAC$. Так как BE и CM биссектрисы углов ABC и ACB, то $\angle ABC + \angle ACB = 2\angle BAC$. Отсюда, по теореме о сумме углов треугольника $\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180°$, $3\angle BAC = 180°$. Значит, $\angle BAC = 60°$.

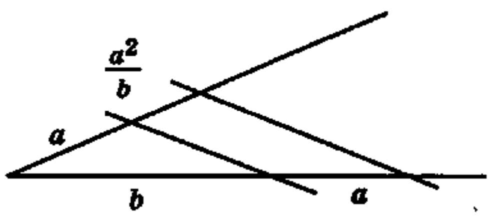
Часть 3

13. Ответ: 105.

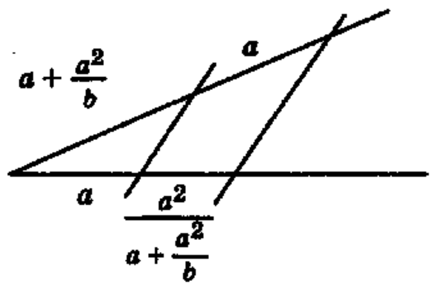


Решение. Пусть точки O, M, N и K являются серединами отрезков AD, AB, CD и MN соответственно. Значит, трапеция $AMND$ вписана в данную окружность, следовательно, эта трапеция — равнобочная. Так как MN — средняя линия трапеции $ABCD$, то и трапеция $ABCD$ — равнобочная. Соединим центр окружности точку O с точкой K — серединой MN. Так как MN — хорда, то $\angle OKM = 90°$, т. е. треугольник OMK — прямоугольный. Обозначим радиус окружности буквой R, тогда $OK = R$, так как средняя линия трапеции делит любой отрезок, концы которого лежат на основаниях трапеции, пополам. Отсюда $OK = OM$. Значит, $\angle KMO = 30°$. Углы KMO и AOM равны, как накрест лежащие при параллельных прямых MN и AD и секущей OM. Значит, $\angle AOM = 30°$, а так как $OA = OM$, как радиусы одной окружности, то $\angle MAO = 75°$. Отсюда получим, что $\angle B = \angle C = 105°$.

14. Решение. Преобразуем выражение: умножим обе части равенства на a^2, получим $\frac{a^2}{x} = a + \frac{a^2}{b}$. Из преобразованной формулы видно, что сначала надо построить отрезок $\frac{a^2}{b}$. Значит, по трем отрезкам a, a и b построим четвертый пропорциональный отрезок $y = \frac{a^2}{b}$. Для его построения воспользуемся методом построения четвертого пропорционального отрезка $\frac{b}{a} = \frac{a}{y}$ и построим отрезок $y = \frac{a^2}{b}$ (рис. а). Затем построим отрезок, равный сумме отрезков a и $\frac{a^2}{b}$. Затем по трем отрезкам $a + \frac{a^2}{b}$, a и a построим четвертый пропорциональный отрезок $x = \frac{a^2}{a + \frac{a^2}{b}}$, снова воспользовавшись методом построения четвертого пропорционального отрезка $\frac{a + \frac{a^2}{b}}{a} = \frac{a}{x}$ (рис. б).

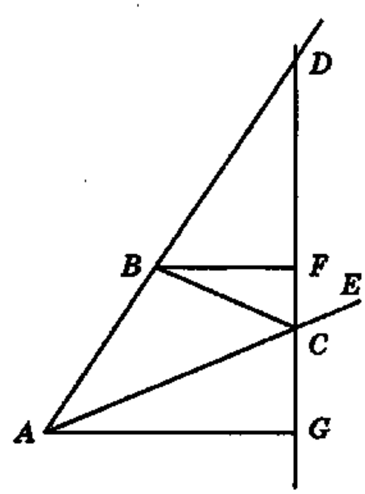


а)



б)

15. Решение. К прямой CD из точек A и B опустим перпендикуляры AG и BF. Треугольники BDF и ADG подобны как прямоугольные треугольники общим углом при вершине D. Отсюда $\frac{AD}{DB} = \frac{AG}{BF}$, а по условию, $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CB}$, следовательно, и $\frac{AC}{CB} = \frac{AG}{BF}$. Значит, прямоугольные треугольники BCF и ACG подобны, так как выполняется условие пропорциональности сторон. Следовательно, у них $\angle BCF = \angle ACG$ как лежащие против соответственных сторон. Углы ACG и ECF равны, как вертикальные. Значит, $\angle BCF = \angle ECF$. Отсюда прямая CD — биссектриса внешнего угла треугольника ABC.



Мищенко Татьяна Михайловна

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ ПО ГЕОМЕТРИИ

Учебное пособие к учебникам
Л.С. Атанасяна и др. «Геометрия. 7–9 классы»,
А.В. Погорелова «Геометрия. 7–9 классы»,
И.Ф. Шарыгина «Геометрия. 7–9 классы»

8 класс

Редакция «Образовательные проекты»

Ответственный редактор *Г. Н. Хромова*
Технический редактор *А. Л. Шелудченко*
Корректор *И. Н. Мокина*

Оригинал-макет подготовлен *ООО «Бета-Фрейм»*
Обложка *дизайн-студии «Дикобраз»*

Общероссийский классификатор продукции ОК-005-93, том 2;
953005 — литература учебная

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.001683.02.10 от 05.02.2010 г.

ООО «Издательство Астрель»
129085, Москва, пр-д Ольминского, д. 3а

ООО «Издательство АСТ»
141100, РФ, Московская обл., г. Щелково, ул. Заречная, д. 96

Наши электронные адреса: www.ast.ru. E-mail: astpub@aha.ru

ОАО «Владимирская книжная типография».
600000, г. Владимир, Октябрьский проспект, д. 7.
Качество печати соответствует качеству предоставленных диапозитивов

По вопросам приобретения книг обращаться по адресу:
129085, Москва, Звездный бульвар, д. 21, 7-й этаж
Отдел реализации учебной литературы издательской группы «АСТ»
Справки по тел.: (495)615-53-10, 232-17-04